Durée : 4 heures

Baccalauréat C Japon juin 1993

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points : A d'affixe -4 ; B d'affixe $+4$; E d'affixe 4i ; C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOED soient des carrés.

1. Placer les points précédents dans le repère $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ et donner les affixes des points C et D.
2. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = (1+\text{i})z + 4 + 4\text{i}.$$

   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

   b. Préciser les points $f(\text{A})$ et $f(\text{O})$.
   Déterminer l'image par f de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment [AO].

   c. Exprimer, pour tout point M d'affixe z, l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z. En déduire que $MM' = M\text{C}$ et, pour M distinct de C, montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MC}\right)$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit J le milieu du segment [EB] et I le milieu du segment [AO].
   Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (on justifiera la réponse).

EXERCICE 2 **5 points**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = 2AB.
On désigne par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), I l'image de K par la réflexion S_1 d'axe (AB), et J l'image de K par la réflexion S_2 d'axe (AC).

1. **a.** Faire une figure.

   b. Démontrer que la droite (BI) est perpendiculaire à la droite (AI) et que la droite (CJ) est perpendiculaire à la droite (AJ).

   c. Préciser la nature de la composée $S_2 \circ S_1$; puis prouver que A est le milieu de [IJ].

2. **a.** Soit $\widehat{\text{C}}$ l'angle de sommet C dans le triangle ACK.
   Montrer que $\tan\left(\widehat{\text{C}}\right) = \dfrac{\text{AK}}{\text{CK}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$.

   b. Quelle est l'image du segment [AK] par la réflexion S_1 ?
   Quelle est l'image du segment [CK] par la réflexion S_2 ?

   c. Déduire de a. et b. et de la question 1. c. l'égalité CJ = IJ.

   d. Soit D le projeté orthogonal de C sur la droite (BI). Montrer que le quadrilatère (CJID) est un carré.

3. On considère un cercle variable (Γ) passant par C et tangent à la droite (IJ), et on note Ω son centre.
   Démontrer que Ω appartient à une parabole ($\mathscr{P}$) dont on précisera le foyer, la directrice et le sommet.
   Justifier que cette parabole passe par le point D. Dessiner ($\mathscr{P}$) sur la figure du 1.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - x\text{e}^{-x}}$ puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x - \text{e}^{x-1}.$$

   a. Étudier les variations de g (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de g).
   Calculer $g(1)$ et montrer que, pour tout x réel, $g(x) \leqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout x réel $x\text{e}^{-x} \leqslant \dfrac{1}{\text{e}}$, puis $1 - x\text{e}^{-x} > 0$.

2. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 - x\text{e}^{-x}}.$$

   Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 3 cm).

   a. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   c. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

   d. Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

   e. Tracer (T), puis (C) (on admettra que (C) est au-dessus de (T) pour $x < 0$, et au-dessous pour $x > 0$).

3. **a.** Déterminer les images par f des intervalles $[0\,;\,1]$ et $[1\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout x positif ou nul :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\text{e}}{\text{e}-1}.$$

Partie B

1. Donner une interprétation géométrique du nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

2. Soit n un entier naturel non nul, et soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\text{e}^{-nx}\,\text{d}x$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_1 = 1 - \dfrac{2}{\text{e}}$.

b. On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties ; déterminer les coefficients a, b et c tels que la fonction $H(x)$ définie par $H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

En déduire $J_2 = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{5}{\mathrm{e}^2}\right)$.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \ldots + J_n$.

a. Montrer que, pour tout réel x,

$$1 + x\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-2x} + \cdots + x^n\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1 - \left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^{n+1}}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}.$$

b. En déduire que $I - u_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)x} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. En utilisant A 1. b., montrer que pour tout x positif ou nul :

$$0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)x} f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)}.$$

d. En déduire un encadrement de $I - u_n$; étudier alors la convergence de la suite de terme général u_n.

4. Montrer que $u_2 \leqslant I \leqslant u_2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1)}$.

Sachant que $u_2 = 1 + J_1 + J_2$, trouver deux nombres décimaux d_1 et d_2 tels que $0 < d_2 - d_1 < 10^{-1}$ et $d_1 < 1 < d_2$.