Durée : 4 heures

Baccalauréat S Japon juin 1995

EXERCICE 1 **5 points**

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$ on considère un triangle direct ABC, isocèle et rectangle en A. On désigne par :

— E un point du segment [BC], distinct de B et distinct de C;
— B′ le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) ;
— C′ le projeté orthogonal de E sur la droite (AC).

1. Démontrer que $\text{AB}' = \text{CC}'$.
2. Déduire de 1. qu'il existe une rotation unique r telle que $r(\text{A}) = \text{C}$ et $r(\text{B}') = \text{C}'$, rotation dont on donnera la mesure de l'angle (comprise entre $-\pi$ et π).
3. **a.** Prouver que $r(\text{B}) = \text{A}$ et en déduire $(r \circ r)(\text{B})$.
   b. Quelle est la nature de l'application $r \circ r$?
   c. Déterminer le centre Ω de r.
4. Montrer que les points A, B′, C′, Ω et E sont cocycliques.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient cinq boules blanches numérotées de 1 à 5, trois bleues numérotées de 6 à 8 et deux vertes numérotées 9 et 10.
On tire deux boules simultanément de l'urne. (On admet que tous les tirages sont équiprobables.)

1. Calculer la probabilité des évènements suivants
   — A : « les deux boules ont des numéros impairs »,
   — B : « les deux boules ont la même couleur »,
   — C : « les deux boules ont des numéros impairs et sont de la même couleur ».
   Les évènements A et B sont-ils indépendants?
2. Quelle est la probabilité des évènements :
   — D : « les deux boules sont de couleurs différentes »?
   — E : « les deux boules sont de couleurs différentes et portent des numéro impairs »?
3. On vient de tirer deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour qu'elles portent des numéros impairs?

EXERCICE 3 **5 points**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{8}\ln x - x\ln x.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ en prenant 2 cm comme unité graphique.

Partie A : Étude du signe de la dérivée de f

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique.
   On note α cette solution.
   Justifier que $1 \leqslant \alpha \leqslant 1,2$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Étude et représentation graphique de la fonction f

1. Calculer les limites de f en zéro et en $+\infty$.
   Donner le tableau des variations de f.
2. Prouver que :
   $$0 \leqslant f(\alpha) - f(1) \leqslant f'(1) \cdot (\alpha - 1) \leqslant 0,2 \cdot f'(1).$$
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Tracer la courbe (C).

EXERCICE 4 **5 points**

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ et quatre points distincts A, B, C et D tels que :

$$\begin{array}{l} \text{A et C sont sur } (\mathscr{D}), \\ \text{B et D sont sur } (\mathscr{D}'), \\ \text{AC} = \text{BD et } \left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{array}$$

[AC] et [BD] n'ont pas même milieu.

1. Faire une figure et la compléter au fil des questions.
2. Justifier qu'il existe une rotation $\mathscr{R}_1$ qui transforme A en B et C en D.
   Déterminer son angle α_1 et construire sur la figure son centre I. (On expliquera la construction.)
3. Justifier qu'il existe une rotation $\mathscr{R}_2$ qui transforme D en A et B en C.
   Déterminer son angle α_2 et construire sur la figure son centre J. (On expliquera la construction.)
4. On désigne par M le milieu de [AC] et N celui de [BD].
   Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre [AB], et Q le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre [CD].
   a. Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{\text{IA}},\ \overrightarrow{\text{IP}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{IC}},\ \overrightarrow{\text{IQ}}\right)$ et calculer les rapports $\dfrac{\text{IP}}{\text{IA}}$ et $\dfrac{\text{IQ}}{\text{IC}}$.
   b. Préciser l'angle et le rapport de la similitude de centre I qui transforme A en P et C en Q.