Baccalauréat ES La Réunion septembre 1995

EXERCICE 1 **5 points**

- À propos de pourcentages

1. Dans un pays X, l'inflation était de 15 % au cours du mois d'octobre 1994. S'il en est de même au cours du mois de novembre 1994, peut-on dire que l'inflation aura été de 30 % sur l'ensemble des 2 mois ? Justifier.
2. Deux sociétés A et B proposent à leurs clients les placements suivants :

   A propose un intérêt de 9 % par an.

   B propose un intérêt de 0,75 % par mois.

   Dans les deux cas, les intérêts sont ajoutés au capital à la fin de chaque période de référence : année pour A, mois pour B.

   a. Si un client place un capital de 1 000 000 F, que sera devenu ce capital au bout d'une année dans les deux cas ?

   b. Laquelle des deux sociétés offre le placement le plus avantageux pour les clients ?
3. Dire qu'un taux mensuel de t % est équivalent à un taux annuel de t' % signifie qu'une somme placée au taux mensuel de t % acquiert, au bout d'un an, la même valeur que si elle avait été placée au taux annuel de t' %.

   On a donc : $1 + \dfrac{t'9}{100} = \left(1 + \dfrac{0,75t}{100}\right)^{12}$.

   Calculer t à 10^{-2} près pour que t' soit égal à 15. (On pourra utiliser la fonction logarithme.)

EXERCICE 2 **5 points**

On lance simultanément un dé cubique bleu et un dé cubique rouge.
Les faces de chacun de ces deux dés sont numérotées de 1 à 6.
À chaque lancer apparaît donc un couple de nombres. On suppose tous les résultats équiprobables.
On désigne par E l'évènement « la somme des deux nombres est supérieure ou égale à 10 ».

1. Montrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{1}{6}$.
2. On lance ces deux dés 10 fois de suite. Quelle est la probabilité que l'évènement E soit réalisé exactement 3 fois ? (On donnera une valeur décimale arrondie à 10^{-3} près.)
3. On lance les deux dés n fois de suite.

   a. Montrer que la probabilité P_n que E soit réalisé au moins une fois est égale à $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

   b. Quel est le nombre minimum de lancers pour que cette probabilité P_n soit supérieure à 0,9 ?

   c. Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$?

PROBLÈME **10 points**

1. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = -x^2 - 2 + 2\ln x$$

(ln désigne le logarithme népérien).
g' désignant la fonction dérivée de g, calculer $g'(x)$.
Étudier le sens de variation de g. Calculer $g(1)$.
En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0~;~+\infty$.

2. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = -x + 5 - 2\frac{\ln x}{x}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm).

a. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0.

b. f' désignant la fonction dérivée de f calculer $f'(x)$.
Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de f'.
Dresser le tableau de variations de f.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 5$ est une asymptote à la courbe (C).
Étudier la position de (C) par rapport à (D).

d. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1~;~5]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

e. Tracer (D) et (C).

3. a. Calculer la dérivée de la fonction u définie sur $]0~;~+\infty[$ par $u(x) = (\ln x)^2$.
En déduire une primitive H de la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

b. On désigne par E la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
Mettre E en évidence sur le graphique.
Calculer l'aire, en cm^2, de cette partie E.