Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S La Réunion juin 1995 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ... , 9.

1. **a.** Quel est le nombre de codes possibles ?

   b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.

   Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.

   a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?

   b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes... (le délai d'attente double entre deux essais successifs).

   Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité graphique : 4 cm). On appelle A et B les points d'affixes respectives i et $-$i.
À tout point M du plan d'affixe z différente de $-$i, on associe le point M' dont l'affixe z' est définie par

$$z' = \frac{z - \text{i}}{z + \text{i}}.$$

1. Calculer l'affixe z' du point M' associé au point M d'affixe $z = 2 + \text{i}$. Préciser le module et un argument de z'. Placer les points M et M' dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.

   Montrer que $\text{O}M' = \dfrac{M\text{A}}{M\text{B}}$. En déduire que, lorsque z est réel, M' appartient à un cercle que l'on précisera.

3. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.

   Aux points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = \overline{z}$, (où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z), $z_2 = -z$ et $z_3 = \dfrac{1}{z}$, on associe les points M'_1, M'_2 et M'_3 d'affixes z'_1, z'_2 et z'_3.

   a. Montrer les relations $z'_1 = \dfrac{1}{\overline{z'}}$, $z'_2 = \dfrac{1}{z'}$ et $z'_3 = \dfrac{1}{z}$.

   Exprimer les modules et arguments de z'_1, z'_2 et $z'3_3$ en fonction du module et d'un argument de z'.

   b. En utilisant ce qui précède, placer les points M_1, M_2, M_3, M'_1, M'_2 et M'_3 sur la même figure qu'au 1. dans le cas où $z = 2 + \text{i}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

On désigne par :

r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$,

r_{B} la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$,

r_{C} la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$,

et par D et E les points tels que $r_{\text{B}}(\text{A}) = \text{D}$ et $r_{\text{C}}(\text{D}) = \text{E}$.

1. Démontrer que $r_{\text{C}} \circ r_{\text{B}} \circ r_{\text{A}}$ est la symétrie centrale de centre B.
   Préciser alors la position du point E.
2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.
   On nomme $\mathscr{S}$ cette similitude.
   Calculer le rapport $\dfrac{\text{BD}}{\text{AE}}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AE}}\,,\,\overrightarrow{\text{BD}}\right)$.
   En déduire que $\mathscr{S}(\text{E}) = \text{D}$.
3. Soit Ω le centre de la similitude $\mathscr{S}$.
   Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.
   Construire Ω.
4. **a.** Démontrer que $\mathscr{S}$ transforme la droite (AC) en (CB).
   b. Démontrer que l'image par $\mathscr{S}$ du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de daimètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude $\mathscr{S}$ est le point I milieu du segment [DE].

PROBLÈME **10 points**

Dans tout ce problème, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

1. Étudier les variations de g. Préciser $g(1)$.
2. En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur) dans l'expression de $f(x)$.
   Déterminer la limite de f en 0.

3. Montrer que pour tout réel $x > 0, f'(x) = \dfrac{1}{2x}g(x)$.

   En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. On nomme C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C_f.

Partie C – Résolution approchées d'équations

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0~;~1]$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0~;~1]$ par $h(x) = f(x) - x$).

   On nomme α cette solution.

2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

   On nomme β cette solution.

3. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α.