Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C & E La Réunion juin 1969 ∾

EXERCICE 1

Soit n un entier positif. Quel est le reste de la division par 4 de la somme

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n ?$$

EXERCICE 2

Étude du mouvement du mobile M dont les coordonnées, dans un repère orthonormé, Ox, Oy, sont exprimées en fonction du temps par

$$x = \frac{1-t}{t} \quad \text{et} \quad y = \text{Log}\, t,$$

lorsque t varie de 0 à $+\infty$.
Construire la trajectoire.
Décrire le déplacement de M sur cette courbe.
Déterminer à chaque instant les vecteurs vitesse et accélération et construire ces vecteurs, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$, pour $t = 1$.
Indiquer si le mouvement est accéléré ou retardé.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy. Étant donné $\alpha \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on considère la transformation ponctuelle S qui, au point $M(x\,;\,y)$, image du nombre complexe $z = x + \text{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), fait correspondre le point $M'\left(x'\,;\,y'\right)$, image du nombre complexe $z' = x' + \text{i}y$, ($x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$) déterminé par

$$z' = z(\cos 2\alpha + \text{i}\sin 2\alpha),$$

ou $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Établir les relations qui donnent x' et y' en fonction de x et y et, réciproquement, x et y en fonction de x' et y'.
   En déduire que la transformation S est involutive.
   Retrouver cette dernière propriété en calculant z en fonction de z' et de α.
   Montrer que la transformation S a une infinité de points invariants situés sur la droite (Δ) d'équation

   $$x \sin\alpha - y\cos\alpha = 0.$$

   Comparer les directions de (Δ) et de la droite MM'.
2. Déterminer l'ensemble des milieux, I, de MM'.
   Préciser la nature de la transformation S.
3. Calculer, en fonction de α et des coordonnées, x et y, de M, les distances de ce point à la droite (D) d'équation

   $$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$$

   d'une part et au point F de coordonnées $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ d'autre part.
   En déduire l'équation de la parabole (P) de foyer F et de directrice (D). Former l'équation de la transformée de (P) par S. Expliquer le résultat obtenu.

4. On suppose, dans cette question, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Soit (H) la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 = 4$. Indiquer la nature de (H).

Construire cette courbe dans le repère donné. Construire dans le même repère la courbe (H') déduite de (H) par la transformation S.

Donner l'équation de (H') sous la forme $y = f(x)$.

Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (H'), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 2)$.

Déterminer λ pour que cette aire soit égale à $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

N. B. - Les questions 3 et 4 sont indépendantes l'une de l'autre.