∽ Baccalauréat S La Réunion juin 1999 ∽

Exercice 1 **5 points**

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac.

Partie A

On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Partie B

On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\dfrac{28}{351}$.
2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul ; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés, on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.
   a. Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne, au total, $6n$ faces peintes.
   b. Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit inférieur à 10^{-12}. Les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous forme fractionnaire.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère l'application f qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
On désigne par A et O les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et i.

1. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et de rayon 1, privé de O.
   a. Pour tout nombre complexe z non nul, démontrer que :

   $$\left|z' + \text{i}\right| = \left|z'\right| \quad \text{équivaut à} \quad |z + \text{i}| = 1.$$

   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_1'$, image de $\mathscr{C}_1$ par f.
   c. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1'$ sur une même figure.
2. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z non nul,
   $\left|z' - \text{i}\right|^2 = 2$ équivaut à $|z + \text{i}|^2 = 2$ (on pourra utiliser $\left|Z^2\right| = Z\overline{Z}$).

b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_2'$ image de $\mathscr{C}_2$ par f.

c. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2'$ sur la figure précédente.

3. **a.** Donner l'écriture complexe de la similitude directe σ de centre Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$ de rapport 2, et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Montrer que $\sigma \circ f$ est l'application qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M'' d'affixe z'' telle que

$$z'' = \frac{2\mathrm{i} + (3-\mathrm{i})\overline{z}}{\overline{z}}.$$

c. À l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2, images respectives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ par $\sigma \circ f$.

d. Tracer les ensembles Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On considère la courbe paramétrée (Γ), ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées $(x(t),\ y(t))$ sont définies, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 5\cos t \\ y(t) & = & 3\sin t \end{array}\right.$$

Partie 1 On se propose, dans cette partie, de tracer la courbe (Γ).

1. Recherche d'un intervalle d'étude.

a. Par quelle transformation géométrique le point $M(-t)$ est-il l'image du point $M(t)$ de (Γ) ?

b. Par quelle transformation géométrique le point $M(\pi - t)$ est-il l'image du point $M(t)$ de (Γ) ?

c. Expliquer comment, pour tracer la courbe (Γ), on peut limiter l'étude à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Tracé de (Γ).

a. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Tracer la courbe (Γ) avec ses tangentes aux points $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Propriété géométrique liée à la courbe (Γ)

Soient F et F$'$ les points d'affixes respectives 4 et -4.

Le point M, de paramètre t, appartenant à la courbe (Γ), on note $z = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ son affixe. Soit $\overrightarrow{W}$ le vecteur d'affixe $w = -5\sin t + 3\mathrm{i}\sin t$.

1. Démontrer que $16 - z^2 = w^2$.

2. En déduire que $\left(\overrightarrow{M\mathrm{F}},\ \overrightarrow{W}\right) = \left(\overrightarrow{W},\ \overrightarrow{\mathrm{F}'M}\right)$ modulo 2π.

3. Comment la propriété précédente permet-elle de construire la tangente en tout point de la courbe ? Réaliser cette construction pour le point de paramètre $\frac{\pi}{3}$.

Problème **5 points**

L'objet du problème est d'étudier une fonction f puis d'examiner des intégrales qui en sont issues.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\text{e}^{x} + \text{e}^{-x}\right) ;$$

on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ on a :
   $$f(x) = x + \ln\left(1 + \text{e}^{-2x}\right).$$
   c. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   d. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la droite (Δ) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ on pose

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(1 + \text{e}^{-2t}\right)\,\text{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question **1** de la partie A, donner une interprétation géométrique de $F(x)$.
2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 1 + a]$, on a
   $$\frac{1}{1+a} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1.$$
   b. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction logarithme, établir que $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \ln(1 + a) \leqslant a$.
4. Soit x un réel strictement positif.
   Déduire de la question **3** :
   $$\int_0^x \frac{\text{e}^{-2t}}{1+\text{e}^{-2t}}\,\text{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x \text{e}^{-2t}\,\text{d}t.$$
   puis $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \text{e}^{-2t}\right) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2x}$.
5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté ℓ.
   Établir que $\dfrac{1}{2}\ln 2 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + \text{e}^{-2t}\right)\,\text{d}t$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t$.
(On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h, définie sur $[0~:~+\infty[$ par $h(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)$).

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. Exprimer S_n à l'aide de F et n.

b. La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.