

❧ Baccalauréat S La Réunion juin 2002 ❧

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(A)$. On désigne par $\overline{A}$ l'évènement contraire de A .

La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(A/B)$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
soit P l'évènement : « on obtient PILE ».
 - a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).
 - b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE »?
2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
 - si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
 - dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».
 - a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée?
 - b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée?
 - c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée?

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z^3 - 3z^2 + 3z.$$

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.
Calculer les affixes des points images de O, B et C par f . Placer les points B, C et leurs images B' et C' sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement?

2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie :

$$z^3 - 3z^2 + 2z = 0.$$

En déduire que f possède trois points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. a. Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$z' - 1 = (z - 1)^3.$$

- b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z - 1$ et α un argument de $z - 1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z' - 1$ en fonction de r et de α .

Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM , et une relation entre une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'})$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

- c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

4. Montrer que, si M appartient à une demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B , alors M' appartient à une demi-droite D' que l'on déterminera.

Justifier l'appartenance du point B' à Γ' et à D' .

Compléter la figure avec les différents éléments : Γ , Γ' , D et D' .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = -i\bar{z}.$$

- a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $1 - i$.

- b. Soit D' la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D' .

Calculer une mesure de l'angle $(\vec{w}, \vec{u})$.

Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.

- c. Déterminer l'écriture complexe de r .

2. Dans cette question on considère l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z_1 = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i\bar{z} = \frac{z + z'}{2}.$$

- a.** Soit le point A d'affixe $z = 2 + i$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p .
 - b.** Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.
 - c.** Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p .
- 3.** On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
Construire l'image A'' du point A par f .
Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ , que l'on déterminera.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire comme propriété géométrique pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées $(1 \ 0)$ et on s'intéresse au minimum de la distance AM où M est un point de la courbe $\mathcal{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$, calculer en fonction de x la distance AM .
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}.$$

- a. Calculer $g'(x)$.
- b. On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g . Calculer $g''(x)$.
Montrer que pour tout x réel :

$$g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2.$$

- c. En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.
 - d. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $[0; 1]$ vérifiant $g'(\alpha) = 0$.
Vérifier l'inégalité suivante : $0,46 \leq \alpha \leq 0,47$.
Déterminer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x .
 - e. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?
3. Établir que la distance AM est minimum au point M_α d'abscisse α de la courbe $\mathcal{C}$.
Placer le point M_α sur le graphique.

4. En utilisant la définition de α , montrer les égalités :

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2}f(2\alpha)$$

puis :

$$g(\alpha) = \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2.$$

Utiliser les variations de f et le résultat suivant, $0,46 \leq \alpha \leq 0,47$ pour encadrer $g(\alpha)$; en déduire un encadrement de la distance AM_α d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f_2, f_3, f_4, f_5 , et f_6 soit respectivement les courbes $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ obtenues à l'aide d'un logiciel.

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 f_1 dx$.
2. On considère pour n entier naturel non nul l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n dx$.
Interpréter géométriquement I_n .
Calculer pour n entier naturel quelconque, I_n en fonction de n .
3. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (I_n) ?

Montrer que $I_n = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} \right]$ et en déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.

