

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat S La Réunion juin 1995 ❧

EXERCICE 1

5 points

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ..., 9.

1.
 - a. Quel est le nombre de codes possibles?
 - b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux?
2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.
Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.
 - a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres?
 - b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes... (le délai d'attente double entre deux essais successifs).
Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures?

EXERCICE 2

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; (unité graphique : 4 cm).
On appelle A et B les points d'affixes respectives i et $-i$.
À tout point M du plan d'affixe z différente de $-i$, on associe le point M' dont l'affixe z' est définie par

$$z' = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Calculer l'affixe z' du point M' associé au point M d'affixe $z = 2 + i$. Préciser le module et un argument de z' . Placer les points M et M' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
2. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.
Montrer que $OM' = \frac{MA}{MB}$. En déduire que, lorsque z est réel, M' appartient à un cercle que l'on précisera.
3. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.
Aux points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = \bar{z}$, (où $\bar{z}$ désigne le nombre conjugué de z), $z_2 = -z$ et $z_3 = \frac{1}{z}$, on associe les points M'_1, M'_2 et M'_3 d'affixes z'_1, z'_2 et z'_3 .
 - a. Montrer les relations $z'_1 = \frac{1}{z'}$, $z'_2 = \frac{1}{z'}$ et $z'_3 = \frac{1}{z'}$.
Exprimer les modules et arguments de z'_1, z'_2 et z'_3 en fonction du module et d'un argument de z' .
 - b. En utilisant ce qui précède, placer les points $M_1, M_2, M_3, M'_1, M'_2$ et M'_3 sur la même figure qu'au 1. dans le cas où $z = 2 + i$.

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par :

r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

et par D et E les points tels que $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B.

Préciser alors la position du point E.

2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

On nomme $\mathcal{S}$ cette similitude.

Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$.

En déduire que $\mathcal{S}(E) = D$.

3. Soit Ω le centre de la similitude $\mathcal{S}$.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.

Construire Ω .

4. a. Démontrer que $\mathcal{S}$ transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par $\mathcal{S}$ du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude $\mathcal{S}$ est le point I milieu du segment [DE].

PROBLÈME**10 points**

Dans tout ce problème, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$$

- Étudier les variations de g . Préciser $g(1)$.
- En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur) dans l'expression de $f(x)$.
Déterminer la limite de f en 0.
3. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$.
En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. On nomme C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé; unité graphique 5 cm. Tracer C_f .

Partie C – Résolution approchées d'équations

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0; 1]$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; 1]$ par $h(x) = f(x) - x$).
On nomme α cette solution.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
On nomme β cette solution.
3. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} . En déduire un encadrement de α .