Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole & La Réunion ∽ septembre 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. **Restitution organisée de connaissances**

   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

   — P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

   — Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\ ;\ 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\ ;\ 0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

   a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

   b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;\,0)$.

   Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

   b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

   d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. **a.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le **a** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au **1** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6},\ z_2 = 2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.

2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'ensemble $\mathrm{A}_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad (\text{modulo } 7)$.

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 7)$ équivaut à $x \equiv 4 \quad (\text{modulo } 7)$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad (\text{modulo } 7)$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $\mathrm{A}_p = \{1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \quad (\text{modulo } p)$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 (\text{modulo } 31)$ et $3x \equiv 1 \quad (\text{modulo } 31)$. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 31)$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$

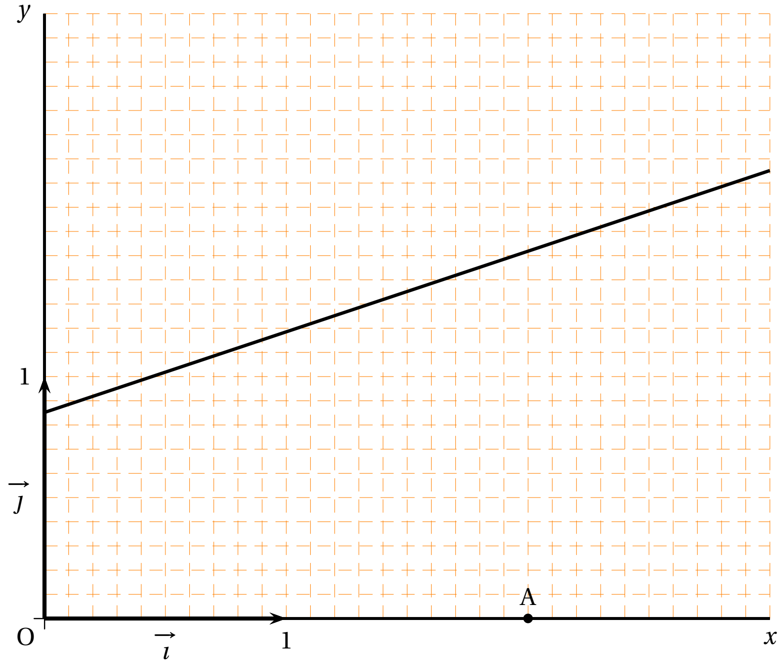
(E_0) : $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que
   $f(x) = g(x)\cos x$.
   Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2



ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 3 (spécialité)

a	1	2	3	4	5	6
y						6