Baccalauréat S La Réunion juillet 1997

Exercice 1 **5 points**

Une urne contient 8 jetons : trois jetons noirs et carrés, trois jetons noirs et ronds, un jeton vert et carré, un jeton vert et rond.
L'épreuve consiste à extraire, au hasard, deux jetons de l'urne selon une procédure qui est déterminée par le lancer d'une pièce truquée :

- si l'on obtient « PILE », on extrait les deux jetons simultanément,
- si l'on obtient « FACE », on extrait les deux jetons successivement avec remise.

Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'apparition de « PILE » est $\dfrac{7}{15}$.
On note :
P l'évènement « on obtient PILE » ;
F l'évènement « on obtient FACE » ;
A l'évènement « les deux jetons tirés ont la même forme OU la même couleur » ;
E_1 l'évènement « obtenir deux jetons de la même couleur » ;
E_2 l'évènement « obtenir deux jetons de la même forme » ;
E_3 l'évènement « obtenir deux jetons de la même forme ET de la même couleur ».
Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. On lance la pièce.
   a. On suppose que l'on a obtenu « PILE ».
   Déterminer la probabilité conditionnelle des évènements E_1, E_2 et E_3.
   En déduire que la probabilité de l'évènement A, sachant que P est réalisé, est $\dfrac{11}{14}$.
   b. On suppose que l'on a obtenu « FACE ».
   Déterminer la probabilité conditionnelle des évènements E_1, E_2 et E_3.
   En déduire que la probabilité de l'évènement A, sachant que F est réalisé, est $\dfrac{13}{16}$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
3. Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on répète n fois l'épreuve, de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité p_n pour que l'évènement A se réalise à chaque épreuve.
   Pour quelles valeurs de n, a-t-on $p_n > \dfrac{1}{2}$?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À tout point M du plan d'affixe z, différente de zéro, on associe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' définies par $z' = \text{i}z$ et $z'' = z^2$.

1. **Cas particulier**

   Soit A le point d'affixe $a = 2 - \text{i}$ et B le point d'affixe $b = 2 + \text{i}$.
   On appelle A$'$ et A$''$ les points associés à A,
   On appelle B$'$ et B$''$ les points associés à B.

   a. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes a' et a^2 des points A$'$ et A$''$. Prouver que A est le milieu du segment [A$'$A$''$].
   b. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes b' et b'' des points B$'$ et B$''$.
   c. Calculer, sous forme algébrique, $\dfrac{b - b''}{b - b'}$.

d. En déduire la nature du triangle B B′B″. Représenter sur une figure les points A, A′, A″, B, B′ et B″.

2. Cas général

M est un point quelconque d'affixe z différente de zéro. N est le point d'affixe $\overline{z}$. N' et N'' sont les points associés au point N.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

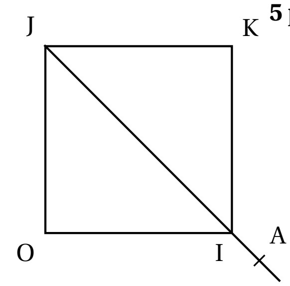
a. Prouver que, si $z \neq 1$, l'angle $\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}\right)$ a pour mesure un argument de $\dfrac{z-1}{\mathrm{i}-1}$.

b. Déterminer une relation entre x et y pour que $\dfrac{z-1}{\mathrm{i}-1}$ soit réel.

c. Montrer que les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $y = -x + 1$. (1)

d. On suppose que l'affixe de M est différente de 1 et que la relation (1) est vérifiée. Prouver que $NN'N''$ est un triangle rectangle en N.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**



Dans le plan orienté, OIKJ désigne le carré de côté 1 tel que $+\dfrac{\pi}{2}$ soit une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$.

A est un point quelconque de la droite (IJ) différent de I.

s désigne la similitude directe de centre O qui transforme le point I en le point A.

Les images de J, K et A par s sont respectivement notées J′, K′ et A′.

1. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère OAK′J′ ?

b. Prouver que les points J′, A et A′ sont alignés.

c. Comparer les angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$.

d. Reproduire le dessin ci-dessus en prenant OI = 5 cm et construire les points J′, K′ et A′. (la construction sera expliquée)

e. Prouver que A′O = A′K′.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$, on note dorénavant a l'affixe du point A et α un argument de a.

a. Prouver que $a - 1$ admet pour argument $-\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$.

b. En utilisant la symétrie d'axe (IJ), prouver que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{KA}}, \overrightarrow{\mathrm{KI}}\right)$.

En déduire qu'un argument de $a - (1 + \mathrm{i})$ admet pour mesure $-\alpha - \dfrac{\pi}{2}$.

3. **a.** Prouver que si z' désigne l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par s, $z' = az$.

b. Déterminer k' et a' les affixes respectives des points K′ et A′ en fonction de a.

c. On note z_1 et z_2 les affixes respectives de $\overrightarrow{\mathrm{KK'}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{K'A'}}$.

En utilisant la question 2., prouver que z_1 est un réel et que z_2 est un imaginaire pur.

4. Prouver que K′ est le projeté orthogonal de A′ sur la droite (JK).

PROBLÈME

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.

Dans tout le problème I désigne l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie A

On appelle f_0 et f_1 les fonctions définies sur I par $f_0(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_1(x) = x\mathrm{e}^x$.
$\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont les courbes représentatives de f_0 et de f_1 dans le repère $\mathscr{R}$.

1. **Étude de la fonction $\boldsymbol{f}$.**
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier le signe de f_1', sur I et dresser le tableau de variation de f_1.
2. Vérifier que pour tout $x \in I$, $f_1'(x) = f_0(x) - f_1(x)$ (1)
3. Soit $x \in I$. On appelle M_0 et M_1 les points de $\mathscr{C}_0$ et de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x. Déterminer selon les valeurs de x les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Les graphiques
   a. Comment peut-on construire $\mathscr{C}_0$ à partir de la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^x$?
   Dessiner $\mathscr{C}_0$.
   b. Placer les points de $\mathscr{C}_1$ d'abscisses 0, 1, 2 en précisant les tangentes à $\mathscr{C}_1$ en ces points.
   c. Dessiner $\mathscr{C}_1$.

Partie B

On se propose de fabriquer, à la suite de f_0 et de f_1 des fonctions $f_2, f_3, \ldots, f_n$, dérivables sur I et satisfaisant aux conditions :

$$(2)\left\{\begin{array}{lcl}\multicolumn{3}{l}{\text{pour tout } x \text{ élément de } I, \text{ pour tout } n \text{ entier naturel non nul,}}\\ f_n'(x) & = & f_{n-1}(x) - f_n(x)\\ f_n(0) & = & 0\end{array}\right.$$

1. On pose pour tout x de I, $g_n(x) = f_n(x)\mathrm{e}^x$, c'est-à-dire $f_n(x) = g_n(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Calculer $f_n'(x)$ en fonction de $g_n(x)$ et de $g_n'(x)$ pour tout x de I.
   b. Montrer que f_n satisfait aux conditions (2) si et seulement si

$$(3)\left\{\begin{array}{lcl}\multicolumn{3}{l}{\text{pour tout } x \text{ élément de } I, \text{ pour tout } n \text{ entier naturel non nul,}}\\ g_n'(x) & = & \mathrm{e}^x f_{n-1}(x)\\ g_n(0) & = & 0\end{array}\right.$$

2. Calcul de f_2. (On rappelle que $f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Calculer $g_2'(x)$ puis $g_2(x)$ pour $x \in I$.
   b. En déduire $f_2(x)$.
   c. Montrer par récurrence que pour tout x élément de I, pour tout n entier naturel non nul,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie C

Soit a un élément non nul fixé dans I. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$ où f_n est la fonction définie dans la deuxième partie.

1. Calculer $I_0(a)$.

2. En utilisant les conditions (2), montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}.$$

3. En déduire que pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

4. Dans cette question, on pose $a = 1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\mathscr{R}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0\,;\,1]$,
$f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}x^n$.

c. En déduire l'encadrement : pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$, puis la limite de u_n.

d. Déduire enfin que : $\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.