Baccalauréat C La Réunion juin 1980

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$7x - 4y = 9.$$

Quelles sont les valeurs possibles du P.G.C.D des couples $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation ?
Donner la forme générale des couples $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation, dont le P.G.C.D est maximum.

EXERCICE 2

Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \end{array}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un plan muni d ?un repère orthonormé.

1. Calculer $f(x) + f(-x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie.
2. Étudier les variations de f dans $\mathbb{R}_+$ et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points de $\mathscr{C}$ dont les abscisses sont positives.
   On précisera la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à son asymptote.
3. Calculer l'aire de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \alpha \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & x+1 \end{array}\right.$$

   où α est un réel positif donné, et sa limite quand α tend vers l'infini.

PROBLÈME

Soit d l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie ?

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z = x + \mathrm{i}y, \quad d(z) = \inf[y - \mathrm{E}(y),\ \mathrm{E}(y+1) - y],$$

x et y réels.

1. Calculer $d(1)$, $d\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$, $d\left(1 + \dfrac{5\mathrm{i}}{2}\right)$.
   Donner une interprétation géométrique de l'application d en utilisant le point M_0 d'affixe z_0 et les droites D_0 et D'_0 d'équations respectives
   $y = \mathrm{E}\left(y_0\right)$ et $y = \mathrm{E}\left(y_0 + 1\right)$.
2. *Les candidats pourront résoudre cette question, soit par le calcul, soi par une méthode géométrique, utilisant l'interprétation précédente et suivant les cas, une symétrie orthogonale ou une translation convenablement choisie.*

   Comparer,

   pour tout nombre complexe z, $d(-z)$ et $d(z)$;

   pour tout nombre complexe z et pour nombre entier q, $d(z + \mathrm{i}q)$ et $d(z)$;

pour tout couple de réels x ; y, $d\left(x+\mathrm{i}y'\right)$ et $d(x+\mathrm{i}y)$ lorsque $y' = 2\mathrm{E}(y)+y+1$.

Déterminer l'ensemble des valeurs $d(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{C}$.

3. Soit δ l'application de P dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\delta(M) = d(z)$.

Définir et représenter graphiquement dans P l'ensemble des points M tels que $\delta(M) = 0$.

On définit de même une application c de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z = x+\mathrm{i}y, \quad c(z) = inf[x-\mathrm{E}(x), \mathrm{E}(x+1)-x]$$

pour x et y réels, et l'application correspondante γ, de P dans R, qui à tout point M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\gamma(M) = c(z)$.

Définir et représenter graphiquement dans P l'ensemble des points M tels que :

$$\delta(M) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \gamma(z) = \frac{1}{2}.$$

4. Soit T l'application qui, à tout point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe z' telle que :

$$z' = x+\mathrm{i}d(z) \quad \text{avec } x \text{ partie réelle de } z.$$

Soit M_1 d'affixe 1, M_2 d'affixe $1+\mathrm{i}$ et M_3 le milieu du segment M_1M_2 ; déterminer leurs images par T.

T est-elle une application affine de P ?

5. On note $I_{a,\ b}$ l'ensemble des points M de P dont les affixes $z = x+\mathrm{i}y$ vérifient : $a \leqslant y < b$, a et b étant deux réels donnés.

- **a.** Démontrer que la restriction de T à $I_{n,\ n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ est une translation.
- **b.** Démontrer que la restriction de T à $I_{n+\frac{1}{2}, n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ est une symétrie orthogonale.

6. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}. \end{array}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \dfrac{3}{2}$.

7. Étudier les variations de f est construire sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans le plan P. Montrer que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie.

8. Construire la courbe $\mathscr{C}'$, image de la courbe $\mathscr{C}$ par T.

9. Construire la représentation graphique Γ de la fonction g :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-d(x+\mathrm{i}y) \end{array}$$

où x et y sont les coordonnées d'un point M de C.