

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
La Réunion juin 1964

EXERCICE 1

Trouver deux entiers naturels, connaissant leur P. G. C. D., 17, et la différence de leurs carrés, 1 445.

EXERCICE 2

Dans un plan, on donne deux points fixes, O et A ($OA = a \neq 0$).

Au point quelconque m du plan on fait correspondre le point M situé sur la demi-droite symétrique de la demi-droite OA par rapport à la droite Om , à la distance OM du point O définie par la formule

$$a \times OM = Om^2.$$

M est dit transformé du point m .

1.
 - a. La transformation a-t-elle des points doubles?
 - b. De combien de points m un point M choisi quelconque dans le plan est-il le transformé?
 - c. On considère un repère orthonormé xOy . O est l'origine des coordonnées, \overrightarrow{Ox} l'axe porté par OA et de même sens que \overrightarrow{OA} , Oy l'axe directement perpendiculaire.
On pose $Om = r$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}) = \theta \pmod{\pi}$.
Exprimer les coordonnées $(x; y)$ du point m en fonction de r et θ .
Exprimer les coordonnées $(X; Y)$ de M , transformé de m , en fonction de r et de θ .
 - d. Soit $z = x + iy$ le nombre complexe dont l'image est m et $Z = X + iY$ le nombre complexe dont l'image est M .
Trouver la relation entre Z et z .
2. On désigne par I le centre du cercle inscrit au triangle OAM, par J, K, L les centres des cercles exinscrits à ce triangle, intérieurs à ses angles respectifs de sommets O, A, M.
 - a. Montrer que la puissance du point O par rapport au cercle de diamètre KL est égale à $-Om^2$.
 - b. En conclure que m et son symétrique m' par rapport à O sont sur le cercle de diamètre KL.
 - c. Montrer que les points I et J sont conjugués par rapport à ce cercle.
3. On suppose que le point m décrit l'hyperbole équilatère de centre O dont A est un foyer.
Quelle est l'équation de cette hyperbole par rapport aux axes Ox et Oy ?
Quelle relation doivent vérifier r et θ pour que m décrive cette hyperbole? En déduire que l'ensemble des points M est la directrice associée au foyer A.
4. Retrouver géométriquement le résultat précédent. (On montrera d'abord que le point I est à l'intersection de mm' et de la directrice associée au foyer A).