Baccalauréat La Réunion septembre 1967

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

Résoudre et discuter l'équation suivante, en x :

$$\left(1-\text{tg}^2\theta\right)\cos x - 2\text{tg}\theta\sin x = p.$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$y = f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{x}$$

pour toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'expression $\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{x}$ a un sens.
Tracer la courbe représentative de cette fonction en repère orthonormé $x\text{O}y$, en précisant le rôle de la droite d'équation $x - 2y - 3 = 0$.
Calculer l'aire de la partie du plan formée des points de coordonnées $(x~;~y)$ vérifiant

$$x \geqslant 1, \quad x \leqslant 2, \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \leqslant f(x).$$

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$ on donne les droites fixes
(D), d'équation $y = a\,(a > 0)$,
$\left(D'\right)$, d'équation $y = -a$,
(Δ), d'équation $y = x\text{tg}\,\alpha\, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.
(Δ) coupe (D) en A et $\left(D'\right)$ en A$'$. On désigne par (C) un cercle variable tangent à (D) en A et par $\left(C'\right)$ un cercle variable tangent à $\left(D'\right)$ en A$'$. Le problème concerne l'étude des cercles (C) et $\left(C'\right)$ tangents entre eux.

1. Un cercle (C) étant donné, construire le ou les cercles $\left(C'\right)$ qui lui sont tangents. On pourra utiliser une homothétie ayant pour centre le point de contact, M, de (C) et $\left(C'\right)$.
2. Montrer que l'ensemble des points de contact des cercles (C) et $\left(C'\right)$ est formé de la droite (Δ) et d'un cercle.

   Dans toute la suite du problème, on ne considère que les cercles (C) et $\left(C'\right)$ dont les points de contact, M, appartiennent à (Δ). On désigne leurs centres respectifs par C et C'. Calculer l'angle des droites Ox et CC'.
3. On se place dans le cas où $a = \text{tg}\,\alpha$, pour cette question et pour toute la suite du problème. Calculer, en fonction de l'abscisse, x, du point M, le rapport, r, des aires des cercles (C) et $\left(C'\right)$, dans cet ordre.

   Étudier les variations de r et construire la courbe représentative dans un repère orthonormé, lorsque M décrit (Δ).

4. Soit S le deuxième centre d'homothétie de (C) et $\left(C'\right)$.
Quel est l'homologue de A' dans l'homothétie de centre S transformant $\left(C'\right)$ en (C) ?
Connaissant l'ordonnée, λ, du point C, écrire les équations des droites CC' et $S\text{A}'$. En déduire, entre les coordonnées, x et y, de S, une relation indépendante de λ ; exprimer y en fonction de x et étudier cette fonction dans le cas particulier $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.