

∞ Baccalauréat C La Réunion juin 1979 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Déterminer les entiers relatifs x congrus à -1 modulo 5 et à 0 modulo 3 :

$$x \equiv -1 \pmod{5} \text{ et } x \equiv 0 \pmod{3}.$$

2. Déterminer les entiers relatifs x tels que :

$$x \equiv 2 \pmod{5} \text{ et } x \equiv -1 \pmod{3}$$

3. Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Etudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - |x \log x| & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- La fonction f est-elle continue sur $]0; +\infty[$?
Est-elle dérivable sur $]0; +\infty[$?
- Construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Préciser en particulier les tangentes à la courbe aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

PROBLÈME

12 POINTS

Rappels : L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . \bar{z} désigne le conjugué de z . L'application $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui au couple (z, z') , associe la partie réelle de $z\bar{z}'$ est un produit scalaire; une base orthonormée de \mathbb{C} munie de ce produit scalaire est $(1, i)$.

1. On donne un nombre complexe u et l'on considère l'ensemble D des complexes z tels que

$$z + u\bar{z} = 0.$$

- Démontrer que D est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C} .
- Démontrer que si $|u| \neq 1$, D est de dimension 0.
- Démontrer que si $|u| = 1$ et $u \neq 1$, D est la droite vectorielle de base $(1 - u)$.
Etudier le cas $u = 1$.

2. a est un réel non nul, b est un élément de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.
On considère l'application φ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$\varphi(z) = az + b\bar{z}.$$

- Montrer que φ est linéaire.
- Étudier le noyau de φ . En déduire que φ est bijective si et seulement si $|a| \neq |b|$.

3. Dans cette question on suppose que φ est bijective.
Étudier suivant les valeurs du réel λ l'ensemble E_λ des nombres z tels que $\varphi(z) = \lambda z$.
Montrer qu'il existe dans \mathbb{C} deux droites vectorielles globalement invariantes par φ et que ces deux droites sont orthogonales.
4. On suppose dans cette question que $a = |b|$.
- Déterminer l'image de φ .
 - Montrer que suivant les valeurs de a , φ est soit une projection vectorielle, soit la composée d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle.
5. On considère le plan affine euclidien P , muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
À tout point m de coordonnées $(x; y)$ on associe son affixe $z = x + iy$.
- Définir avec précision l'application f de P dans P dans laquelle m d'affixe z a pour image m' d'affixe

$$z' = \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \bar{z}.$$

m étant donné, construire m' puis M tel que $\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{Om} + \vec{Om'})$.

Quelle est la nature de l'application g de P dans P telle que $M = g(m)$?

Quelle application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} peut-on lui associer?

- Utiliser les résultats de la troisième question pour étudier l'application h de P dans P qui, à tout point m d'affixe z , associe le point M d'affixe $Z = -z + 2i\bar{z}$.
Dessiner l'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans cette transformation.