

∞ Baccalauréat C La Réunion juin 1983 ∞

PROBLÈME

On se place dans tout le problème dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, noté \mathcal{R} .

Les axes sont désignés par (Ox) et (Oy) .

Partie A

Soit f l'application de $] -\infty ; 1]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f : x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

1. Étudier les variations et limites de f .

Dans toute la suite du problème la représentation graphique de f dans le repère \mathcal{R} est notée \mathcal{C} .

Dessiner cette courbe. Préciser la tangente au point d'abscisse 1.

2. On désigne par s la symétrie affine orthogonale par rapport à l'axe (Ox) . On pose $\mathcal{C}' = s(\mathcal{C})$.
Établir que $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ est une parabole \mathcal{P} dont on déterminera le sommet, le foyer et la directrice.
3. Montrer que la courbe \mathcal{C} admet en chacun de ses points M une tangente.
Cette tangente coupe l'axe (Ox) en un point T .
Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (Ox) .
On désigne par S le point de coordonnées $(1; 0)$; montrer que S est le milieu du segment $[HT]$.
En déduire une construction simple de la tangente à \mathcal{C} en un point M quelconque donné sur \mathcal{C} .
4. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $] -\infty ; 1]$.
En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} 0 & \leq x \leq 1 \\ -f(x) & \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier l'existence et les propriétés de la suite réelle (u_n) définie par la donnée d'un réel u_0 et la relation :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}.$$

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) existe si, et seulement si, $u_0 \in [-1; +1]$.
b. Déterminer u_0 de sorte que la suite (u_n) soit constante.
2. Dans la suite de l'énoncé, on posera $u_0 = \sin \alpha_0$, avec :

$$\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right].$$

- a.** Justifier ce choix. Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?
- b.** Établir l'égalité, pour tout $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sqrt{1 - \sin \alpha} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

- c. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique α_n de $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \sin \alpha_n$.
Quelle relation y a-t-il entre α_{n+1} et α_n ?
- d. On considère la suite (β_n) de terme général vérifiant :

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}.$$

Montrer que cette suite est une suite géométrique.

En déduire α_n puis u_n en fonction de n et α_0 .

La suite (u_n) a-t-elle une limite? Quelle est cette limite?

Partie C

Soit M un point mobile de la courbe \mathcal{C} (étudiée dans la partie A) d'abscisse $\sin t$, avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.

- Déterminer la trajectoire du point M et le sens de déplacement du point M sur cette trajectoire.
- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\gamma}(t)$ du point M à la date t . Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|^2$; on appellera t_0 l'unique réel dans $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin t_0 = \frac{1}{16}$.
- Soit $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.

Au point M, on associe les points V et Γ tels que le vecteur \overrightarrow{MV} soit le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur $\overrightarrow{M\Gamma}$ soit le vecteur accélération $\vec{\gamma}(t)$.

Étant donnée, sur la figure, la position de M (à la date t) on demande de construire géométriquement (règle, compas) les points V et Γ .

Indication : Pour construire V on peut commencer de la façon suivante :

La perpendiculaire menée de M à l'axe (Ox) coupe le cercle de centre O et de rayon 1 en un ou deux points, dont un seul d'ordonnée positive ou nulle.

Quelle est l'ordonnée de ce point que l'on notera M'?

(On fera le dessin pour la valeur de t telle que $\sin t = \frac{1}{4}$).