Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C La Réunion juin 1985 ∾

EXERCICE 1 **points**

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l c l l}u_n &=& \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}} &=& \dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{et}\\ v_n &=& \dfrac{1}{\sqrt{n}}u_n & \text{si} & n\geqslant 1. &\end{array}\right.$$

1. Montrer les inégalités

$$\left\{\begin{array}{l c c l l}\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &\leqslant& \dfrac{1}{\sqrt{p}} & \text{si} & p\in\mathbb{N},\ p\geqslant 1\\ \displaystyle\int_p^{p-1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &\geqslant& \dfrac{1}{\sqrt{p}} & \text{si} & p\in\mathbb{N},\ p\geqslant 2\end{array}\right.$$

2. En déduire l'encadrement de u_n :

$$-2+2\sqrt{n+1}\leqslant u_n\leqslant -1+2\sqrt{n}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^\star.$$

3. Déterminer les limites éventuelles, lorsque n tend vers l'infini, des suites :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\quad\text{et}\quad(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$$

EXERCICE 2 **points**

Dans le plan P, on considère un carré ABCD dont les diagonales AC et BD ont pour longueur le réel donné strictement positif a.
Soit t un paramètre réel.

1. À quelle condition sur t le système de points pondérés (A, t), (B, $1-2t$), (C, t), (D, $3-4t$) admet-il un barycentre?
Déterminer la position de ce barycentre.

2. On note E_t, l'ensemble des points M du plan P vérifiant la relation :

$$t\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}}\right\|^2+(1-2t)\left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}}\right\|^2+t\left\|\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|^2+(3-4t)\left\|\overrightarrow{M\mathrm{D}}\right\|^2=a^2(1-t).$$

Déterminer la nature et les éléments remarquables de E_t.
On discutera suivant la valeur de t.
Vérifier que le centre du carré ABCD appartient à E_t.

PROBLÈME **points**

Partie A

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0. \qquad (1)$$

2. Étant donnée une fonction numérique de la variable réelle, g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on définit la fonction f de $\mathbb{R}^\star$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3. On considère l'équation différentielle :

$$y'' = -\frac{1}{x^4} - y. \qquad (2)$$

Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$, est solution de (1).

4. En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

5. Soit g une solution de l'équation (2) définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.

Calculer l'intégrable : $I = \displaystyle\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^3} \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On note g_1 et g_2 les fonctions numériques de la variable réelle définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_1(x) = x\cos\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad : \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_2(x) = x\sin\frac{1}{x}.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée de g_1 et étudier sa limite en $+\infty$.

b. Étudier le signe de $g_1''(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{2}{\pi}\ ;\ +\infty\right]$.

En déduire les variations puis le signe de g_1' sur $\left[\frac{2}{\pi}\ ;\ +\infty\right]$.

En conclure que g_1 est strictement croissante sur $\left[\frac{2}{\pi}\ ;\ +\infty\right]$.

c. En utilisant un développement limité d'ordre 2 en 0 pour la fonction cosinus, montrer qu'il existe une fonction ϵ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_1(x) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

En déduire que la courbe représentative de g_1 admet une asymptote, que l'on précisera, lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée de g_2 et étudier sa limite en $+\infty$.

b. Montrer que g_2 est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\pi}\ ;\ +\infty\right]$. (On pourra appliquer une méthode analogue à celle utilisée en B 1. b.).

c. Étudier la limite de g_2 en $+\infty$.

d. Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative C_1 de g_1 sur $\left[\dfrac{2}{\pi}\ ;\ +\infty\right]$, et la courbe représentative C_2 de g_2 sur $\left[\dfrac{1}{\pi}\ ;\ +\infty\right]$.

On précisera en particulier les coordonnées du point d'intersection de C_1 et C_2.

3. On considère le point mobile M_t, dont les coordonnées à l'instant t, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont données par : $x = g_1(t), y = g_2(t), g_1$ et g_2 étant les fonctions vues ci-dessus, et on étudie son mouvement pour $t \in \left[\dfrac{2}{\pi}\ ;\ \dfrac{4}{\pi}\right]$.

a. On désigne par $\overrightarrow{V_t}$, le vecteur vitesse et $\overrightarrow{\Gamma_t}$ le vecteur accélération à l'instant t.

Comparer $\overrightarrow{V_t}, \overrightarrow{\Gamma_t}$ et $\overrightarrow{\text{O}M_t}$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{V_t} \cdot \overrightarrow{\Gamma_t}$. Qu'en déduit-on quant à la nature du mouvement ?

b. Construire la trajectoire de M_t. Préciser les vecteurs $\overrightarrow{V_t}$ et $\overrightarrow{\Gamma_t}$ pour $t = \dfrac{2}{\pi}$ et pour $t = \dfrac{4}{\pi}$.