Durée : 4 heures

Baccalauréat C La Réunion juin 1987

EXERCICE 1 **4 points**

Pour chaque entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite (u_n), dont chaque terme est positif ou nul.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire qu'elle converge.
3. Déterminer un réel a vérifiant : $\dfrac{x^n}{1+2x+4x^2} \leqslant a$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

1. On désigne par A, B et C des points distincts du plan, ayant pour affixes respectives a, b et c.
   Montrer que ABC est un triangle rectangle en A, si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ a une partie réelle nulle.
2. A chaque point M d'affixe z non nulle, on associe les points A, B et C d'affixes respectives $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{z^2}$ et $\dfrac{1}{z^3}$, et on désigne par F l'ensemble des points M du plan pour lesquels les points A, B et C sont distincts deux à deux, et ABC est un triangle rectangle.
   a. Pour quelles valeurs de z, les points A, B et C sont-ils distincts deux à deux?
   b. Déterminer F puis le représenter. (On notera que le triangle ABC peut être rectangle en A, B, ou C.)

PROBLÈME **12 points**

Les questions ne sont pas indépendantes, mais la formulation de chacune d'elles permettra au candidat d'utiliser tout résultat utile à la résolution de la suite du problème, même s'il ne l'a pas démontré.

On désigne par E l'ensemble des triplets $(x,\ y,\ z)$ de réels **non nuls** vérifiant
$x+y+z=0$.

Première partie

Dans le plan P, on donne des points A, B et C non alignés, et on désigne par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
A. Soit $(x,\ y,\ z)$ un élément de E.

1. Montrer que chacun des ensembles de points pondérés $\{(\text{B},\ y), (\text{C},\ z)\}$,
   $\{(\text{A},\ x),\ (\text{C},\ z)\}$, et $\{(\text{A},\ x),\ (\text{B},\ y)\}$ possède un barycentre.
   Dans la suite, ces trois points seront respectivement notés I, J, et K.

2. **a.** Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul, tel que pour tout point M du plan P, on ait : $x\overrightarrow{\text{MA}} + y\overrightarrow{\text{MB}} + z\overrightarrow{\text{MC}} = \overrightarrow{v}$.
(On exprimera $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$).
b. Montrer que $\overrightarrow{v}$ n'est colinéaire à aucun des trois vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
c. Montrer que chacun des vecteurs $\overrightarrow{\text{AI}}$, $\overrightarrow{\text{BJ}}$ et $\overrightarrow{\text{CK}}$ est non nul, et colinéaire à $\overrightarrow{v}$.
3. **a.** Montrer que pour tout point M du plan P, on a

$$x\text{MA}^2 + y\text{MB}^2 + z\text{MC}^2 = 2\overrightarrow{\text{MO}} \cdot \overrightarrow{v}.$$

b. En déduire que le lieu géométrique des points M du plan P vérifiant $x\text{MA}^2 + y\text{MB}^2 + z\text{MC}^2 = 0$, est la droite D passant par O, perpendiculaire à chacune des droites (AI), (BJ) et (CK).
Dans la suite, on dira que la droite D est associée au triplet :
$\{(\text{A},\ x), (\text{B},\ y), (\text{C},\ z)\}$.
c. Application : construire la droite D associée à : $\{(\text{A},\ -3), (\text{B},\ 1), (\text{C},\ 2)\}$.
4. Soit d une droite passant par O, distincte de chacune des médiatrices du triangle ABC.
Montrer que l'on peut trouver un triplet $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ de E, tel que d soit la droite associée à $\{(\text{A},\ x_0),\ (\text{B},\ y_0),\ (\text{C},\ z_0)\}$.

B. Dans cette partie, on suppose que le triangle ABC n'est pas isocèle, et on désigne par A′, B′, et C′ les milieux respectifs de (B,C), (C,A), et (A,B), par O′ le centre du cercle circonscrit à A′B′C′, par G le centre de gravité du triangle ABC, et par H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Montrer que O et H sont distincts.
2. Montrer que l'on peut trouver un triplet $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ de E, tel que la droite D_1 associée à $\{(\text{A}, x_1),\ (\text{B},\ y_1),\ (\text{C}, z_1)\}$ soit la droite (OH). (On ne demande pas de calculer les réels x_1, y_1 et z_1).
3. On désigne par D_1' la droite associée à $\{(\text{A},\ x_1),\ (\text{B},\ y_1),\ (\text{C},\ z_1)\}$. Montrer que DI et D sont des droites parallèles. (On pourra utiliser une homothétie de centre G).
4. En déduire que $\text{D}_1 = \text{D}_1'$, et que les points O, O′, G, et H sont alignés. On précisera les abscisses de chacun de ces points dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{OG}}\right)$ de la droite D_1.

Deuxième partie
Dans le plan P, on donne une droite D, et un point B n'appartenant pas à D.
Montrer qu'il existe une infinité de couples de points (A, C) vérifiant : D est la droite associée à $\{(\text{A},\ -3),\ (\text{B},\ 1), (\text{C},\ 2)\}$, et ABC est rectangle en A.
On donnera une construction de chaque couple (A, C) solution du problème.