Durée : 4 heures

Baccalauréat C La Réunion juin 1991

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On note (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

1. Donner un tableau de valeurs approchées à 10^{-2} près des termes de la suite d'indices 1, 2, 3, 4, 5 et 10.
2. Tracer, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$; construire à l'aide de ce tracé les points de $\left(\text{O},~\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 en laissant les traits de construction apparents.
3. Que peut-on prévoir pour le comportement de la suite ?
4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, u_n est positif.
5. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x)-x$.
   En déduire que, pour tout réel strictement positif x, on a : $0 < \ln(1+x) < x$; montrer que la suite (u_n) est décroissante.
6. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge et que sa limite est 0.

EXERCICE 2

A, B, C et D sont quatre points du plan orienté. Sur les côtés du quadrilatère ABCD, on construit les triangles rectangles isocèles APB, CQB, CRD et ASD tels que les angles $\left(\overrightarrow{\text{PB}},~\overrightarrow{\text{PA}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{QB}},\overrightarrow{\text{QC}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{RD}},\overrightarrow{\text{RC}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{SD}},\overrightarrow{\text{SA}}\right)$, aient pour mesure $\dfrac{9\pi}{2}$.

Le but de l'exercice est de montrer que PQRS est un parallélogramme en utilisant les nombres complexes.

1. Faire une figure.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. On note respectivement a, b, c et d les affixes des points A, B, C et D et p, q, r et s celles des points P, Q, R et S.
   a. Établir la relation :
   $$p = \frac{1}{2}\left[(1+\text{i})a + (1-\text{i})b\right].$$
   Écrire des relations semblables donnant q, r et s en fonction de a, b, c et d.
   b. Conclure.

EXERCICE 3

Soit trois points A, B et C du plan tels que AB = $3a$, AC = $4a$ et BC = $5a$ où a est un réel donné positif non nul; on désigne par I le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Soit m un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ et G_m le barycentre des trois points pondérés (A, $1-2m$), (B, m), et (C, m).
   Déterminer l'ensemble des points G_m quand m décrit $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que : $(1-2m)G_m\text{A}^2 + mG_m\text{B}^2 + G_m\text{C}^2 = 25a^2m(1-m)$.
4. Déterminer, selon les valeurs des réels m et k ($k>0$), l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que :
   $$(1-2m)M\text{A}^2 + mM\text{B}^2 + mM\text{C}^2 = 25a^2k^2.$$
   Peut-on déterminer m et k pour que les trois points A, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{C}$?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Soit $(\mathscr{H})$ la courbe plane dont une équation dans le repère R est :

$$y^2 - x^2 = 1.$$

On introduit également les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose d'étudier la fonction F et de l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

PREMIÈRE PARTIE

1. Quelle est la nature de la courbe $(\mathscr{H})$? Préciser ses axes et ses sommets.
2. Étudier le sens de variation de f.
   On note G_f la représentation graphique de f dans le repère R.
3. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Vérifier que pour tout réel x on a :
   $$f(x) - x = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}. \quad (1)$$
   En déduire que la courbe G_f admet une droite asymptote D en $+\infty$; préciser la position relative de G_f et de D.
4. Tracer $(\mathscr{H})$; montrer que G_f est une partie de $(\mathscr{H})$ que l'on précisera. On pourra prendre 2 cm comme unité graphique.

DEUXIÈME PARTIE : ÉTUDE DE LA FONCTION *F*

1. Étudier le sens de variation de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x positif on a : $x \leqslant f(x)$.
En déduire que pour tout réel positif t, on a :

$$\frac{t^2}{2} \leqslant \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

TROISIÈME PARTIE

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs définis par :

$$\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right).$$

et R' désigne le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Si M est un point quelconque du plan, on note $(x\,;\ y)$ ses coordonnées dans le repère R et $(X\,;\ Y)$ ses coordonnées dans le repère R'.

1. Vérifier que R' est orthonormé.

2. Quelles sont les formules de changement de repère de R' à R ? On exprimera x et y en fonction de X et Y.

3. En déduire que $(\mathscr{H})$ a pour équation $XY = 2$ dans le repère R'.

4. On travaille maintenant dans le repère R'.
Soient X_1 et X_2 deux réels strictement positifs tels que $X_1 < X_2$.

a. Soit g une fonction continue, strictement positive, et décroissante sur $[X_1\,;\ X_2]$. On appelle G_g la représentation graphique de g dans le repère R'. Soient M et N les points de G_g d'abscisses X_1 et X_2. Soient Q et P les points de $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$ d'abscisses X_1 et X_2 et S la partie bornée limitée par les segments $[\mathrm{O}M]$, $[\mathrm{O}N]$ et l'arc MN de G_g.
Montrer que l'aire de S vaut $\displaystyle\int_{X_1}^{X_2} g(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}X_1 g(X_1) - \frac{1}{2}X_2 g(X_2)$.
On pourra décomposer la partie limitée par $[\mathrm{O}M]$, $\widehat{MN}$, $[N\mathrm{P}]$ et $[\mathrm{PO}]$ de deux façons, en faisant intervenir les deux triangles $\mathrm{O}M\mathrm{Q}$ et $\mathrm{O}N\mathrm{P}$.

b. En déduire, dans le cas où G_g est l'ensemble des points de $(\mathscr{H})$, d'abscisse X vérifiant $X_1 < X < X_2$, que l'aire de S est $\mathscr{A}(S) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{X_1}{X_2}$.

5. Soit t un réel positif; déduire de l'expression de $\mathscr{A}(S)$ où $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en interprétant $F(t)$ en terme d'aire, l'expression de F :

$$F(t) = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right).$$