Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S La Réunion juin 1994 ∾

EXERCICE 1

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et 2i.

1. **a.** Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z vérifiant :

$$(2+\text{i})z + (2-\text{i})\overline{z} = 4.$$

(On pourra poser $z = x + \text{i}y$ où x et y sont deux nombres réels).

b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z vérifiant :

$$(z+2i)\left(\overline{z}-2\text{i}\right) = 4.$$

(On pourra remarquer que $\overline{z}-2\text{i} = \overline{z+2\text{i}}$).

2. Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe $z\,(z \neq 2\text{i})$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z = \frac{\overline{z}+4\text{i}}{\overline{z}-2\text{i}}.$$

a. Vérifier que $z'-1 = \dfrac{6\text{i}}{\overline{z}-2\text{i}}$.

En déduire l'égalité $\text{B}M \times \text{A}M' = 6$ et déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{B}M}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$.

b. On appelle M_1 et M_2 les points d'intersection de (Γ) et (Δ).

Déterminer les images par f de M_1 et M_2.

PROBLÈME

Partie A : le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \text{e}^{-x^2}\,\text{d}x.$$

1. On considère les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x\text{e}^{-x^2}.$$

a. Étudier la fonction f : parité, sens de variation et limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier la fonction g : parité, sens de variation et limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

On pourra utiliser l'égalité $g(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^2\text{e}^{-x^2}\right)$ pour $x \neq 0$.

c. On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

d. i. étudier les positions respectives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

ii. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2. **a.** Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. On se propose d'encadrer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour cela, on considère les fonctions h_1 et h_2 définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$h_1(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad h_2(t) = \frac{t^2}{2} - t + 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

i. Étudier le sens de variation de h_1 et en déduire le signe de $h_1(t)$.

ii. Étudier le sens de variation de h_2 et en déduire le signe de $h_2(t)$.

iii. Déduire des questions précédentes, que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a :

$$1 - x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \frac{x^2}{4}.$$

Montrer que

$$\frac{2}{3} \leqslant I \leqslant \frac{23}{30}.$$

Partie B : Le but de cette partie est l'étude de la convergence d'une suite définie par une intégrale.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Interpréter graphiquement le réel u_n.

2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. Le but de cette question est de montrer que la suite (u_n) est bornée.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

b. En utilisant l'encadrement de l'intégrale I obtenu dans la partie A, prouver que, pour tout n supérieur ou égal à 1, $\dfrac{2}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ?