

## Baccalauréat C La Réunion septembre 1983

### EXERCICE 1

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  positif, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

(où  $\ln x$  représente le logarithme népérien de  $x$ ).

2. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On admettra que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

### EXERCICE 2

Dans  $\mathbb{C}$ , le corps des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) z^3 - (5 + 11i)z^2 + (16i - 4)z + 12 - 28i = 0.$$

1. Vérifier que (E) admet une racine imaginaire pure  $z_0$ . Après avoir écrit le premier membre de (E) sous la forme

$$(z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres complexes à déterminer, résoudre (E).

On notera  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de (E) distinctes de  $z_0$ , avec  $|z_1| < |z_2|$ .

2. Soit  $P$  un plan orienté, rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère  $\Omega$  le point d'affixe  $2i$ . On appelle  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectifs  $z_1$  et  $z_2$ .

Montrer qu'il existe une unique similitude directe de  $P$ , notée  $S$ , de centre  $\Omega$  et telle que  $S(M_1) = M_2$ . Déterminer ses éléments caractéristiques.

### PROBLÈME

Suivant l'usage,  $\mathbb{R}^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$  désignent respectivement l'ensemble des nombres réels non nuls, et l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Soit  $P$  un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

*Préliminaire*

À tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on associe l'application  $\varphi_{a,b}$  de  $P$  dans  $P$  qui, à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ , fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  tel que

$$\begin{cases} x' &= ax \\ y' &= by. \end{cases}$$

1. a. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que l'on a

$$\varphi_{a,b} = \varphi_{a,1} \circ \varphi_{1,b} = \varphi_{1,b} \circ \varphi_{a,1}.$$

Préciser la nature de  $\varphi_{a,1}$  et de  $\varphi_{1,b}$ .

- b.** Soit  $M$  le point de coordonnées  $(1; 2)$ ; choisissant  $a = 2$  et  $b = 3$ , on pose  $m = \varphi_{2,1}(M)$  et  $M' = \varphi_{1,3}(m)$ , donc  $M' = \varphi_{2,3}(M)$ .  
Dessiner les points  $M$ ,  $m$  et  $M'$ .
- c.** Déterminer suivant les valeurs de  $a$  l'ensemble des droites du plan  $P$  invariantes par  $\varphi_{a,2}$  (c'est-à-dire les droites  $\Delta$  telles que  $\varphi_{a,2}(\Delta) = \Delta$ ).

### Partie A

On considère les applications numériques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$$f_{\lambda, m} : x \longmapsto \frac{\lambda}{x^2} e^{\frac{m}{x}}$$

$\lambda$  et  $m$  étant des paramètres,  $\lambda \in ]0; +\infty[$  et  $m \in \mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{C}_{\lambda, m}$  la représentation graphique de  $f_{\lambda, m}$  dans  $P$ .

1. Étudier  $f_{1,0}$  et dessiner  $\mathcal{C}_{1,0}$ .
2. Étudier les variations de  $f_{1,1}$ . Calculer les limites de  $f_{1,1}$  aux bornes de son ensemble de définition (pour calculer la limite de  $f_{1,1}(x)$  quand  $x$  tend vers 0 par valeurs inférieures on pourra poser  $X = \frac{1}{x}$ ).  
Calculer la limite de  $\frac{f_{1,1}(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers 0 par valeurs inférieures; que déduit-on de ce dernier résultat? Tracer  $\mathcal{C}_{1,1}$ .
3. **a.** Montrer que, quel que soit  $(\lambda, m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ , il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\mathcal{C}_{\lambda, m} = \varphi_{a,b}(\mathcal{C}_{1,1})$ .  
**b.** Pour tout  $\lambda > 0$  montrer qu'il existe  $b \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\mathcal{C}_{1,0} = \varphi_{1,b}(\mathcal{C}_{1,1}).$$

4. Soit  $(\lambda, m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ . Trouver une primitive de  $f_{\lambda, m}$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie B

Les notations des parties précédentes sont conservées. Soit  $P_1$  l'ensemble des points  $M$  du plan  $P$  dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient  $x \neq 0$ , et soit  $P_2$  l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées vérifient :  $x \neq 0$  et  $y > 0$ .

À tout point  $M(x; y)$  de  $P$  on associe le point  $M'$  dont les coordonnées  $(x'; y')$  sont données par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{x} \\ y' &= x^2 e^x \end{cases}$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une bijection de  $P_1$  sur  $P_2$ ; dans la suite, cette bijection sera notée  $T$ .  
Déterminer l'application réciproque  $T^{-1}$ .  
Dans tout ce qui suit, si  $E$  est une partie du plan  $P$ , l'image de  $E \cap P_1$  par  $T$  sera appelée (abusivement) : image de  $E$  par  $T$ .
2. Déterminer l'image par  $T$  de la droite d'équation  $x = k$  ( $k \neq 0$ ).
3. **a.** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et  $D_{\alpha, \beta}$  la droite d'équation  $y = \alpha x + \beta$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in ]0; +\infty[$  et  $m \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathcal{C}_{\lambda, m}$  soit l'image de  $D_{\alpha, \beta}$  par  $T$ .

- b.** Réciproquement, toute courbe  $\mathcal{C}_{\lambda, m}$  est-elle l'image par  $T$  d'une droite  $D_{\alpha, \beta}$  ?
- 4.** On considère les points, donnés par leurs coordonnées :

$$A(1; 1), \quad B\left(\frac{1}{2}; 0\right) \quad \text{et} \quad C(1; 0).$$

- a.** Déterminer les images  $A, B'$  et  $C'$  de ces points par  $T$ .
- b.** Quelles sont les courbes  $\mathcal{C}_{\lambda, m}$  images par  $T$  des droites  $(AB), (BC)$  et quelle est l'image de la droite  $(AC)$  ?  
Sur un même graphique représenter l'intersection de ces courbes avec le demi-plan constitué par les points d'abscisses strictement positive.
- c.** Préciser, sur le graphique, l'image de l'intérieur du triangle  $ABC$  et déterminer l'aire de cette image.