

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C La Réunion septembre 1987 ∞

EXERCICE 1

4 points

Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe d'équation :

$$16(x+6)|x+6|+36y|y|=576.$$

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan, on donne un triangle équilatéral ABC.

À chaque point M du segment [AC], on associe :

- le projeté P de M sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB),
- le point Q vérifiant : BCQM est un parallélogramme,
- le point d'intersection N des droites (MQ) et (AB),
- et les points O, I, J et D, milieux respectifs de (B, C), (M, Q), (N, P) et (A, B).

1. Montrer qu'il existe un déplacement D que l'on déterminera tel que, pour tout élément M du segment [AC], on ait : $D(M) = I$.

Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit le segment [AC].

2. Lorsque le point M décrit le segment [AC] :

- a. Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle MCQ.
- b. Déterminer le lieu géométrique du point J.
- c. Montrer que la droite (IJ) passe par un point indépendant du choix de M sur le segment [AC].

PROBLÈME

12 points

On désigne par $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, et par a, b et c des réels quelconques. Les fonctions f_0, f_1, f_2 et f sont respectivement définies sur l'ensemble \mathbb{R} des réels par :

$$f_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}, \quad f_1(x) = xe^{-\frac{x}{2}}, \quad f_2(x) = x^2e^{-\frac{x}{2}}$$

et

$$f(x) = (a + bx + cx^2)e^{-\frac{x}{2}}.$$

On désignera par : $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ et \mathcal{C}_2 les courbes représentatives respectives de f_0, f_1 et f_2 dans le repère R.

A On se propose de représenter $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ et \mathcal{C}_2 .

1. Étudier les variations des fonctions f_0, f_1 et f_2 .
2. Préciser par leurs coordonnées dans le repère R, les points d'intersection de \mathcal{C}_1 et $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_0 , et \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_1 .

3. Étudier sur l'ensemble \mathbb{R} des réels, le signe de chacune des expressions :

$$f_1(x) - f_0(x), \quad f_2(x) - f_0(x) \text{ et } f_2(x) - f_1(x)$$

4. Tracer les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dans le repère R , et hachurer le domaine fermé \mathcal{E} , déterminé par les trois courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , c'est-à-dire l'ensemble \mathcal{E} des points M du plan, dont les coordonnées $(x; y)$ dans le repère R vérifient :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f_2(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases}$$

B On se propose de calculer l'aire de \mathcal{E}

1. Soit n un entier naturel quelconque. Montrer qu'en posant :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-\frac{t}{2}} dt,$$

on définit une fonction I_n qui a l'ensemble \mathbb{R} des réels pour ensemble de définition.

2. Soit n un entier naturel, et x un réel quelconque. Montrer que

$$I_{n+1}(x) = -2x^{n+1} e^{-\frac{x}{2}} + 2(n+1)I_n(x).$$

3. Soit x un réel quelconque. Calculer $I_0(x)$ en fonction de x . En déduire les expressions de $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .
4. Calculer l'aire de \mathcal{E} .

C. On se propose de calculer la dérivée d'ordre n de f

On désigne par $f^{(0)}$ (ou f), $f^{(1)}$ (ou f'), $f^{(2)}$ (ou f''), $f^{(3)}$ ou f'''), etc., les dérivées successives de la fonction f .

1. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , on peut trouver trois réels : α_n , β_n et γ_n vérifiant pour tout réel x :

$$f_n(x) = (\alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2) e^{-\frac{x}{2}}.$$

On trouvera : $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et $\gamma_0 = c$; et pour chaque entier naturel n , le raisonnement par récurrence, montrera que α_{n+1} , β_{n+1} et γ_{n+1} vérifient :

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - \frac{1}{2}\alpha_n, \quad \beta_{n+1} = 2\gamma_n - \frac{1}{2}\beta_n \text{ et } \gamma_{n+1} = -\frac{1}{2}\gamma_n.$$

2. Pour chaque entier naturel n , on pose

$$\beta'_n = \beta_n + 4n\gamma_n \text{ et } \alpha'_n = \alpha_n + 2n\beta_n + 4n(n+1)\gamma_n.$$

Montrer que (α'_n) , (γ'_n) et (γ_n) sont des suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

3. En déduire pour chaque entier naturel n , l'expression de α_n , β_n et γ_n en fonction de n , a , b et c .