Baccalauréat ES La Réunion juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise est équipée d'ordinateurs de trois modèles différents.
30 % sont de marque (M_1), 50 % sont de marque (M_2) et 20 % de marque (M_3).
On choisit un appareil au hasard. Tous les choix sont équiprobables.
Pour i égal à 1, 2 ou 3, on appelle M_i l'évènement : « l'appareil choisi est de marque (M_i) ».
On note $p(M_i)$ la probabilité de l'évènement M_i.
On a donc $p(M_1) = 0,3$; $p(M_2) = 0,5$ et $p(M_3) = 0,2$.
On note T l'évènement : « l'appareil choisi tombe en panne » et $p(T)$ la probabilité de cet évènement.
On suppose que si un appareil tombe en panne, il est réparé et qu'il fonctionne alors correctement.
La probabilité $p_1(T)$ qu'un appareil de marque (M_1) tombe en panne est $\dfrac{1}{30}$.
La probabilité $p_2(T)$ qu'un appareil de marque (M_2) tombe en panne est $\dfrac{1}{20}$.
La probabilité $p_3(T)$ qu'un appareil de marque (M_3) tombe en panne est $\dfrac{1}{40}$.

1. **a.** Traduire toutes les données sur un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que l'appareil choisi soit de marque (M_2) et qu'il tombe en panne.
   c. Vérifier que la probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est égale à 0,04.
   d. Quelle est la probabilité que l'appareil soit de marque (M_2) sachant qu'il est tombé en panne ?
2. *Dans cette question, on donnera le résultat à* 0,1 *près.*
   Un service de l'entreprise possède quatre ordinateurs.
   On suppose que les pannes éventuelles de ces ordinateurs sont indépendantes deux à deux.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des quatre ordinateurs ne tombe en panne ?

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Dans cet exercice aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé.
Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale (en m^3) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé (en m^3) : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prendra pour unité graphique sur l'axe des abscisses 1 cm pour un jour et sur l'axe des ordonnées 0,5 cm pour un mètre-cube.

1. Représenter alors la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
2. **a.** Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ en arrondissant le résultat lu sur la calculatrice à 10^{-3} près.
   b. Donner l'équation de Δ droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont les arrondis à 10^{-2} près des valeurs lues sur la calculatrice.
   c. Représenter la droite Δ sur le graphique.
3. Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points A(1 ; 2,25) ; B(10 ; 27) et qui a pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer a et b et donner l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.

b. Représenter la parabole $\mathscr{P}$ sur le graphique.

4. Dans cette question on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10	
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27	
$\left\lvert y_i - \alpha x_i^2 + \beta\right\rvert$	2,54	0,91	2,71			Total T_1 :
$\left\lvert y_i - a x_i^2 + b\right\rvert$	0	0,05	0,25			Total T_2 :

On ne demande pas de recopier ce tableau.

Les deux totaux calculés évaluent pour chaque ajustement la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.

Donner les arrondis à 10^{-1} près des deux totaux T_1 et T_2 calculés ci-dessus.

(Aucun détail n'est demandé.)

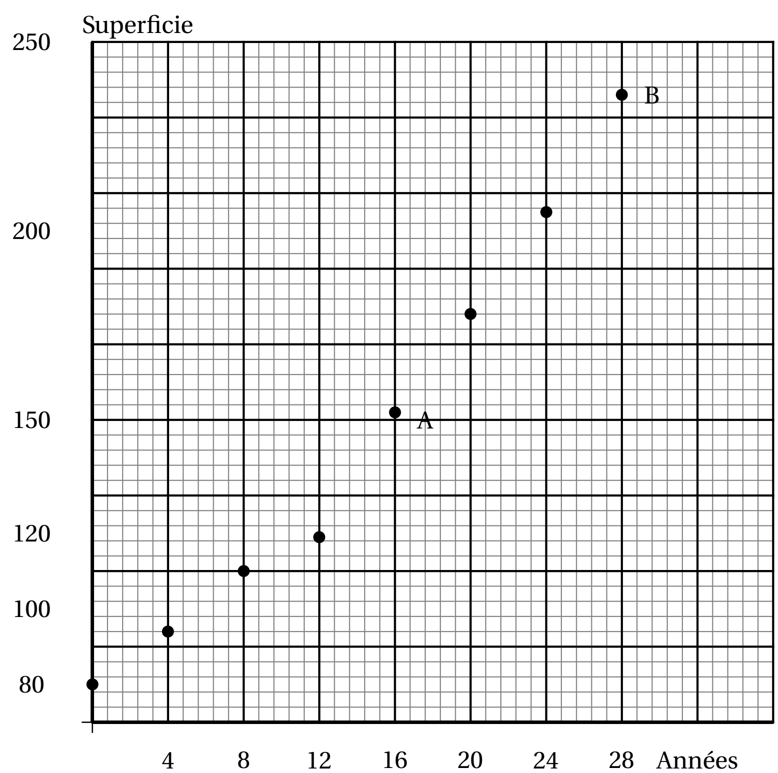
En déduire l'ajustement qui parait le mieux adapté.

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Dans cet exercice aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est demandé. Dans une région de 1 000 km^2, la superficie des terrains urbanisés entre 1970 et 1998 est donnée par le tableau suivant :

Années	1970	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Rang : x_i	0	4	8	12	16	20	24	28
Superficie (en km^2) : y_i	80	94	110	129	152	178	205	236
Y_i	4,38	4,54	4,70	4,86	5,02	5,18	5,32	5,46

Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté ci-dessous.



Les estimations de superficie demandées dans l'exercice seront données en km^2 *et arrondies à l'unité.*

1. **a.** Donner l'arrondi r à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

   b. Donner l'estimation E_1 obtenue par la méthode des moindres carrés de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

2. Au vu de la forme du nuage, on effectue un autre ajustement. On calcule $\ln y_i$. On appelle Y_i l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln y_i$. Les valeurs Y_i sont données dans le tableau considéré.

   a. Donner l'arrondi r' à 10^{-4} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ Y_i)$.

   b. On prendra $Y = 0,039x + 4,39$ pour équation de la droite de régression de Y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Calculer la valeur y estimée pour l'année 2010.
   En déduire une estimation E_2 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

3. On fait un troisième ajustement du nuage de points en utilisant la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A$(16\,;\,152)$ et B$(28\,;\,236)$.

   a. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$.

   b. En déduire l'estimation E_3 faite avec cet ajustement, de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + (-x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $g'(x)$ ou g' désigne la fonction dérivée de g et étudier son signe selon les valeurs de x.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(3)$.
   On ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + (x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal. On prendra 2 cm pour une unité graphique.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$.
3. **a.** Vérifier que $f(x) = x + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
   b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
   On précisera les coordonnées de leur point d'intersection A.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite Δ.

Partie C

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x + (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

   soit une primitive de f.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   En donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.