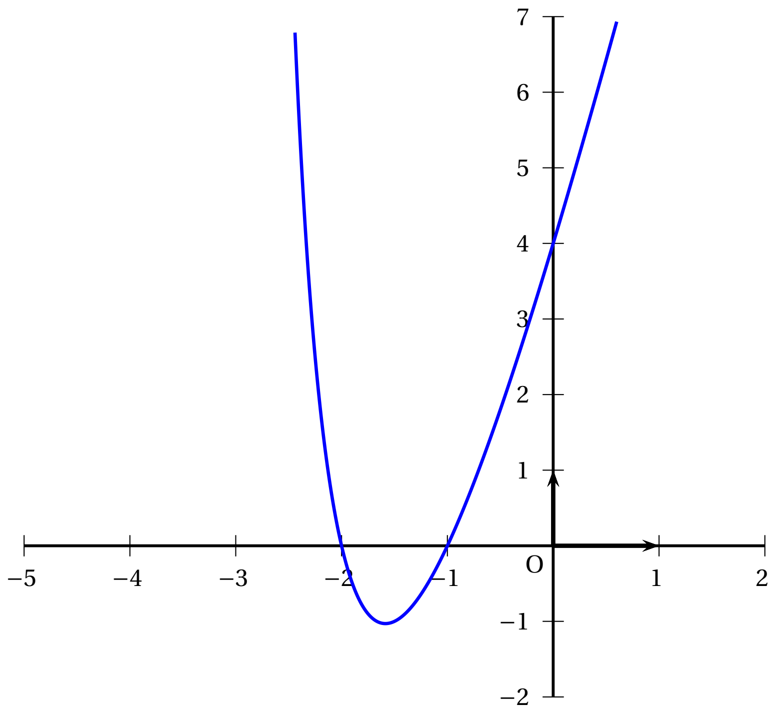
∽ Baccalauréat ES La Réunion juin 1996 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

La représentation graphique, fournie ci-dessous, est celle d'une fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$. Les points A$(-2\,;\,0)$, B$(-1\,;\,0)$ et C$(0\,;\,4)$ appartiennent à la courbe.
Unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée.



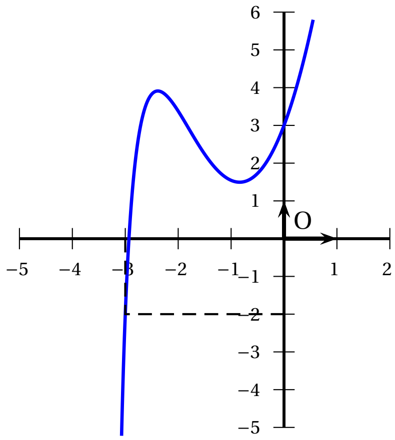
f est la dérivée d'une fonction F définie sur $]-3\,;\,+\infty[$, dont la représentation graphique est l'une des quatre courbes fournie ci-dessous.

1. Déterminer laquelle de ces quatre courbes représente F, en justifiant l'élimination de chacune des autres courbes.
2. La fonction F est définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

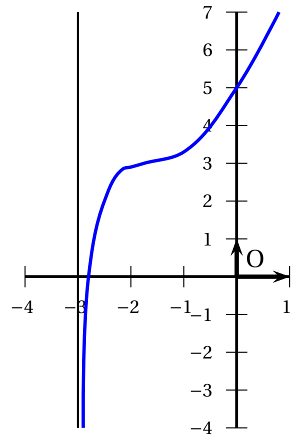
$$F(x) = ax^2 + b\ln(x+3) - 10$$

où a et b sont deux entiers relatifs.
Calculer $F'(x)$, où F' désigne la dérivée de F.
En déduire, à l'aide de la représentation graphique de f, que : $a = 3$ et $b = 12$.

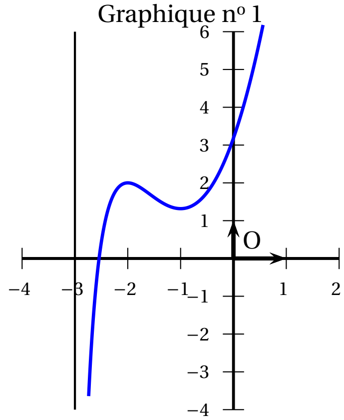
3. Calculer l'aire de la surface comprise entre les segments [OB] et [OC] et la représentation graphique de f.
Donner la valeur exacte en unités d'aire.



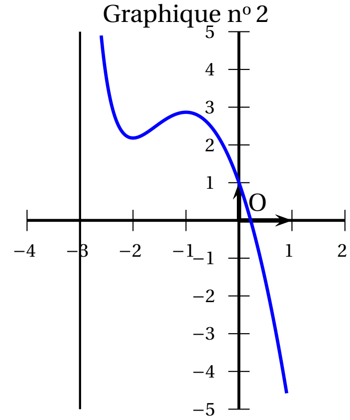
Graphique n° 1



Graphique n° 2



Graphique n° 3



Graphique n° 4

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

On propose le jeu suivant :
Pour une mise de 6 francs, on lance un dé parfaitement équilibré ; pour la sortie du 6, on reçoit 18 francs ; pour celle du 5, on reçoit 6 francs ; pour celle du 4, on reçoit 1 franc, et dans le autres cas on ne reçoit rien.
On appelle gain d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le gain à l'issue d'une partie. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

2. Un joueur se présente ; il n'a que 10 francs en poche. On demande de répondre aux deux questions suivantes qu'il se pose avant d'entrer dans le jeu (la construction d'un arbre décrivant les divers états possibles de la fortune du joueur est conseillée) :

  a. Quelle est la probabilité que je puisse jouer une deuxième partie ?

  b. Quelle est la probabilité qu'il me reste dix francs au moins à l'issue de cette deuxième partie sachant que je peux jouer une deuxième partie ?

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Lors du deuxième tour d'élections municipales, les habitants d'une ville importante ont été amenés à choisir entre la liste conduite par M$^{\text{me}}$ A. (liste A) et celle conduite par M. B. (liste B).

42 % des électeurs ont voté pour la liste A, 30 % pour la liste B, 3 % ont voté « nul » et 25 % se sont abstenus d'aller voter.

1. **a.** Montrer que la probabilité qu'un votant ait choisi la liste A est égale à 0,56 et que la probabilité qu'il ait choisi la liste B est égale à 0,4.

   b. En déduire la probabilité qu'un votant ait voté « nul ».

2. Le jour de ces élections, cinq journalistes se sont rendus sur le terrain, en vue d'un reportage. Chacun d'eux a interrogé une personne qui venait de participer au vote.

   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « Aucun des journalistes n'a interrogé quelqu'un ayant voté pour la liste A ».

   E_2 : « Exactement deux des cinq journalistes ont interrogé quelqu'un ayant voté pour la liste A ».

   E_3 : « Au moins quatre des cinq journalistes ont interrogé quelqu'un ayant voté pour la liste A ».

   Donner les valeurs exactes, puis des valeurs décimales approchées à 10^{-4} près.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1\,200x - 100.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

   Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variations.

2. Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[20~;~40]$.

   Donner, en la justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.

3. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1\,200x + 50}{x^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (on prendra 1 cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 20 en ordonnée).

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a :

   $f'(x) = g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.
3. Étudier les variations de f
4. Montrer que la droite D d'équation : $y = x + 50$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
5. Construire $\mathscr{C}$ et D sur le même graphique.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C

Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est défini sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1\,200x + 50}{x},$$

$C(x)$ étant exprimé en milliers de francs.

Le coût moyen de fabrication par centaine d'objets est donc défini par : $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 130 000 F.

   Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.