Baccalauréat ES La Réunion juillet 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

En vue d'étudier ses préférences alimentaires, le chien Motus a le choix chaque soir entre un et un seul des deux menus suivants :
• des croquettes ;
• une soupe avec de la viande et des pâtes aux légumes.
Une étude réalisée sur un nombre élevé de jours permet de constater que Motus a préféré la soupe dans 70 % des cas et les croquettes dans 30 % des cas.
On admet que le comportement du chien reste identique dans l'avenir.

1. On considère un jour donné choisi au hasard, et on appelle C l'évènement « Motus choisit les croquettes ».
Calculer les probabilités de C et de $\overline{C}$.

2. On observe les choix du chien pendant trois jours consécutifs. On admet que ces choix sont indépendants d'un jour à l'autre.
Construire un arbre pondéré pour décrire tous les choix possibles du chien.

3. Si Motus choisit les croquettes, il boit 1 litre d'eau après son repas, s'il choisit la soupe il ne boit que 1/2 litre d'eau.
On note la quantité bue par le chien après ses repas pendant 3 jours consécutifs, choisis au hasard.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de litres d'eau bue par le chien. On suppose que les choix du chien sont indépendants d'un jour à l'autre pendant ces 3 jours.

a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

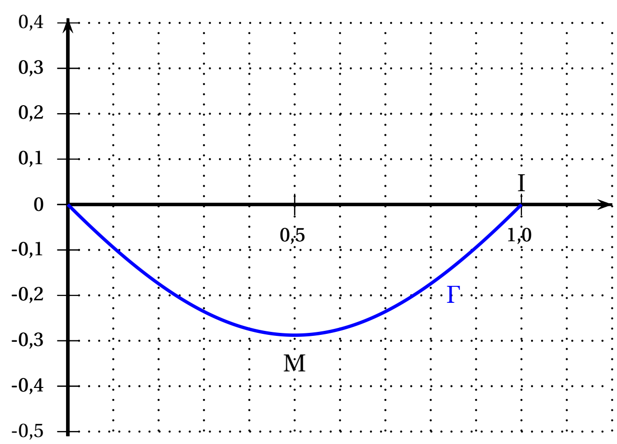
b. Établir la loi de probabilité de X.

c. Calculer $\text{E}(X)$ et interpréter cette valeur.

EXERCICE 2 **5 points**
(enseignement obligatoire)

Le but de cet exercice est de déterminer laquelle des fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :
• $f_1(x) = x^2 - x$
• $f_2(x) = \ln(x^2 - x + 1)$
• $f_3(x) = x\text{e}^{x-1} - x$

est représentée par la courbe Γ donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. Calculer les fonctions dérivées f_1', f_2', f_3' des fonctions f_1, f_2, f_3.
2. L'examen de la courbe Γ permet d'obtenir cinq informations : A, B, C, D, E.
   - A : les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$ appartiennent à Γ.
   - B : la courbe Γ admet en O une tangente d'équation $y = -x$.
   - C : la courbe Γ admet en I une tangente d'équation $y = x - 1$.
   - D : la courbe Γ admet en M une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   - E : l'ordonnée du point M est inférieure à $-0,26$.

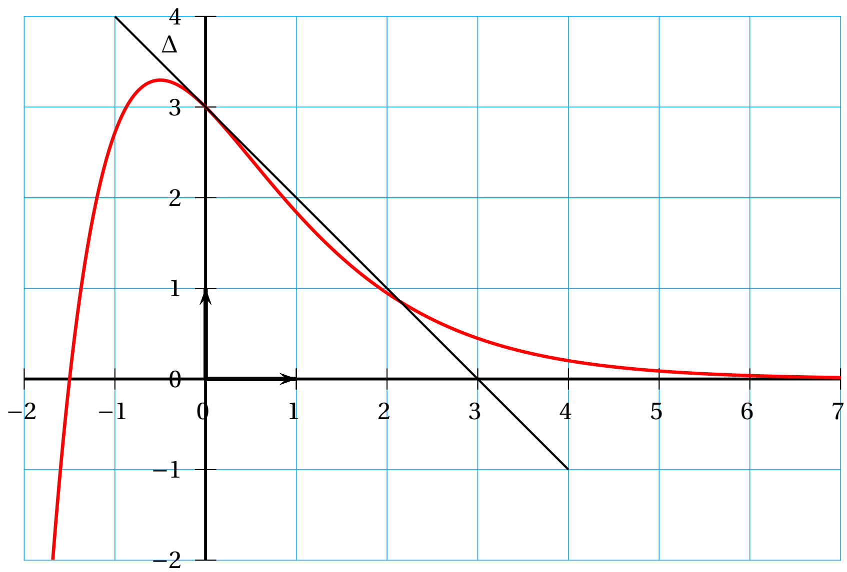
   En utilisant chacune des cinq informations, dans chaque cas, vous préciserez pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, celles qui vérifient la condition correspondante et celles qui ne vérifient pas cette condition.
   Conclure en donnant une équation de la courbe Γ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Exercice 2 **5 points**
(enseignement de spécialité)

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x}(ax + b),\ \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
Cette tangente passe par les points $\text{A}\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$ et $\text{B}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.



Partie A

1. Lire sur le graphique les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Déterminer une équation de la droite Δ.
4. Déterminer les valeurs des réels a et b.

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\mathrm{e}^{-x}(2x+1)+1$.
   Établir le tableau de variation de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de $\mathbb{R}$).
   En déduire que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a $h(x) \leqslant 0$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}(2x+3)+x-3$.
   Calculer $g'(x)$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $h(x)$.
3. En déduire le sens de variation puis le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ pour les points d'abscisse x appartenant à $[0\,;\,1]$.
2. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{2}$.

PROBLÈME **10 points**

Au 1/01 /1999, une entreprise s'est équipée d'un certain nombre de machines-outils identiques, coûtant chacune à l'achat 400 000 F.
Au bout de t années, chacune se revend en ayant perdu chaque année 26 % de sa valeur de l'année précédente ; on désigne par $R(t)$ cette valeur de revente.
On estime que l'entretien d'une machine coûte forfaitairement 20 000 F, pour toute l'utilisation jusqu'à sa revente.
On appelle coût d'investissement $I(t)$ d'une machine pour l'année t, le coût d'achat de cette machine augmenté du montant forfaitaire de son entretien diminué de sa valeur de revente l'année t.
On donne $I(t) = 420 - R(t)$, exprimé en milliers de francs.

1. Exprimer $R(t)$ en fonction de t.
2. On modélise $R(t)$ par la fonction suivante, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$R(t) = 400\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

   On désigne par $C(t)$ le coût total d'utilisation d'une machine au bout de t années. $C(t)$ est donné par :

$$C(t) = 420 - 400\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

   a. Calculer la limite de $C(t)$ en $+\infty$.
   Calculer la dérivée de $C(t)$ et étudier son signe.
   Étudier les variations de la fonction C pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

   b. Vérifier qu'au bout de 15 ans, le coût total est pratiquement égal au coût d'achat augmenté du coût d'entretien, à 5 000 F près.
3. L'entreprise décide de revendre les machines dès que le coût total d'utilisation d'une machine dépasse 330 000 F.

   a. Résoudre l'inéquation $C(t) > 330$. Donner la réponse en nombre entier d'années.

   b. Pour des raisons comptables, l'entreprise revend ses machines au mois de janvier. En quelle année doit-elle le faire ?
   Quel sera le prix de revente d'une machine à cette date ?
   (On donnera la meilleure approximation de ce prix en nombre entier de milliers de francs.)