Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S La Réunion juin 1996 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public :
Dans une urne se trouvent placées 7 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard ; si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si cette boule est rouge, le joueur prend une deuxième boule (sans remettre la première boule tirée dans l'urne) et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée apporte au joueur 1 F et chaque boule rouge 2 F.
Pour faire un jeu, le joueur paie 2 F. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur (c'est à dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

1. **a.** Quelles sont les valeurs que X peut prendre ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

2. Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques (après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne).

   Déterminer la probabilité des évènements suivants :

   A : le joueur perd 3 F.

   B : le joueur perd 1 F.

   C : le gain du joueur est nul.

   En déduire la probabilité de l'évènement D : « le joueur a un gain strictement positif ».

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

   a. $z^2 - 2z + 5 = 0$.

   b. $z^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right) z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B, C, D d'affixes respectives :

   $$z_A = 1 + 2\text{i}, \quad z_B = 1 + \sqrt{3} + \text{i}, \quad z_C = 1 + \sqrt{3} - \text{i}, \text{ et } z_D = 1 - 2\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B, C, D et préciser la nature du quadrilatère ABCD.

   b. Vérifier que

   $$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \text{i}\sqrt{3}.$$

   Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

   c. Prouver que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Γ.

3. On considère l'équation :

   $$z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

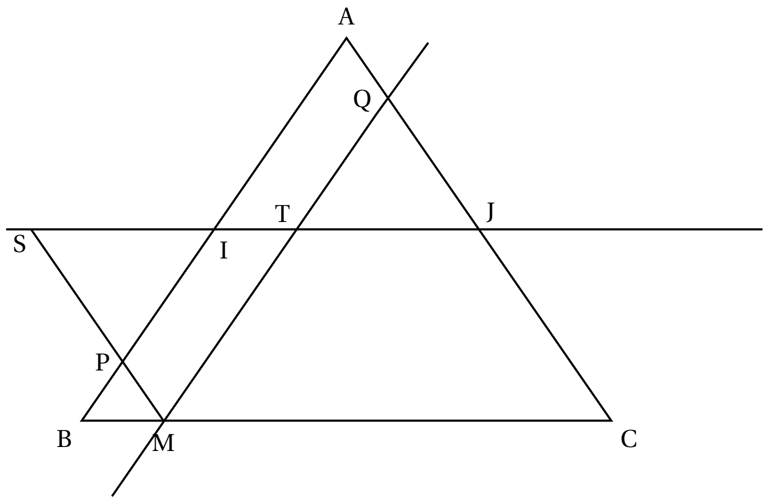
   où θ désigne un nombre réel quelconque.

   a. Résoudre l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

b. Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle Γ.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité



On considère dans le plan euclidien orienté un triangle équilatéral ABC de sens direct, c'est-à-dire tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
On note I le milieu du segment [AB], J celui de [AC], M un point variable du segment [BC].
On mène par M la parallèle à (AC) qui coupe (AB) en P et (IJ) en S puis la parallèle à (AB) qui coupe (AC) en Q et (IJ) en T.
On désigne par O le milieu du segment [PQ].

1. Quel est le lieu géométrique du point O lorsque M décrit le segment [BC] ?
2. Démontrer que O est le milieu des segments [IT] et [SJ].
3. On suppose dans la suite que M est distinct du milieu de [BC].
   Démontrer que les triangles QMC et QTJ sont équilatéraux et de sens direct.
4. Soit s la symétrie de centre O et r la rotation de centre Q et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On pose $f = r \circ s$.
   - **a.** Déterminer les images par f des points P, A et I.
   - **b.** Justifier que f est une rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.
   - **c.** Déterminer le centre Ω de f. Que représente-t-il pour le triangle ABC ?
5. Démontrer que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe indépendant de la position de la position de la position de M sur [BC].

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 2 cm).

Partie A - Étude de la fonction f

1. **a.** Étudier les variations de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = x\text{e}^{x} - 1.$$

   b. En déduire qu'il existe un réel unique α tel que $\alpha\text{e}^{\alpha} = 1$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

   c. Préciser le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. **a.** Déterminer les limites de f aux bornes de $]0~;~+\infty[$.

   b. Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0~;~+\infty[$ en utilisant la question A 1.
   Dresser le tableau des variations de f.

   c. Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \alpha^{-1}$.
   Justifier que : $2,326 \leqslant m \leqslant 2,34$.

Partie B - Construction de la courbe $\mathscr{C}$ et calcul d'aire

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
   Déterminer le point d'intersection de T et de l'axe des ordonnées.
2. Tracer $\mathscr{C}$ et T.
3. Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]0~;~1[$.

   a. Calculer $\displaystyle\int_{\lambda}^{1} \ln x\,\text{d}x$, en utilisant une intégration par parties.

   b. Exprimer, en centimètres carrés, en fonction de λ, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan constitué par les points $M(x~;y)$ tels que : $\lambda \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

   c. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs strictement positives. (On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$).

Partie C - Étude d'une suite

1. En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que, pour tout entier $n > 3$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$. On notera x_n cette solution.
2. Déterminer à la calculatrice des valeurs approchées à 10^{-1} près de $x_{10}, x_{100}, x_{1\,000}$.
3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.
4. Démontrer que, pour tout entier $p > 3$, $f(\ln p) \leqslant p$.
   En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.