∽ Baccalauréat C La Réunion juin 1998 ∾

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les réponses seront données sous forme de fractions.

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.
On note A_1 l'évènement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 l'évènement : « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement A_1 est égale à $\dfrac{1}{19}$.
2. a. Calculer directement la probabilité conditionnelle $p\left(A_2/A_1\right)$ de l'évènement A_2 sachant que A_1 est réalisé.
   b. Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\dfrac{1}{323}$.
3. a. Calculer la probabilité $p\left(A_2/\overline{A_1}\right)$.
   b. En remarquant que $A_2 = \left(A_2 \cap A_1\right) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$, calculer la probabilité $p\left(A_2\right)$ puis en déduire que $p\left(A_2 \cup A_1\right) = \dfrac{33}{323}$.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.
   a. Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne A, B et C de coordonnées respectives (2 ; 0 ; 1), (3 ; −2 ; 0) et (2 ; 8 ; −4).
Aucune figure n'est demandée.

1. Un point M étant de coordonnées $(x ; y ; z)$, exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{\text{A}M} \wedge \overrightarrow{\text{B}M}$.
2. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x+y-2z & = & -4 \\ -x-y-z & = & -11 \\ 2x+y-z & = & 8 \end{array}\right.$$

   On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.
3. Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{\text{A}N} \wedge \overrightarrow{\text{B}N} = \overrightarrow{\text{C}N}$ et donner les coordonnées du point N.
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

a. Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\dfrac{1}{6}\text{C}N^2$.

b. En utilisant les résultats du 1., et en prenant $M = \text{C}$, calculer l'aire du triangle ABC.

c. Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC).

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité : le cm), on trace le cercle (C) de diamètre [AO] où A est le point de coordonnées $(-6\,;\,0)$; on appelle Ω le centre de (C).
Si P est un point de (C), on note K le projeté orthogonal de P sur la droite (AO) et M le point défini par $\overrightarrow{\text{KM}} = \overrightarrow{\text{AP}}$.
Soit t une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\text{O}},\ \overrightarrow{\Omega\text{P}}\right)$.
On veut déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M de paramètre t obtenu lorsque P décrit (C).

1. Sur une figure qui sera complétée à la question 5, représenter (C), placer un point P et les points K et M correspondants.

2. **a.** Exprimer en fonction de t les coordonnées du point P puis celles du point M.

b. En déduire une représentation paramétrique de $(\mathscr{E})$.

c. Soit M$'$ le point de $(\mathscr{E})$ de paramètre $\pi - t$. Par quelle transformation peut-on obtenir le point M$'$ à partir du point M de paramètre t ?

3. Soit N le point $(\mathscr{E})$ de paramètre $t + \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que le vecteur $\left(\overrightarrow{\text{ON}}\right)$ est un vecteur directeur de la tangente à $(\mathscr{E})$ au point M de paramètre t.

4. Dessin de $(\mathscr{E})$:

a. Dresser le tableau des variations conjointes des coordonnées de M pour t appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. Construire les points M_1 M_2 et M_3 obtenus pour les valeurs de t suivantes : $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ et utiliser le résultat des questions 3 et 4 et pour construire trois autres points de $(\mathscr{E})$ ainsi que les tangentes à $(\mathscr{E})$ en M_1, M_2 et M_3.

c. Achever le dessin de $(\mathscr{E})$.

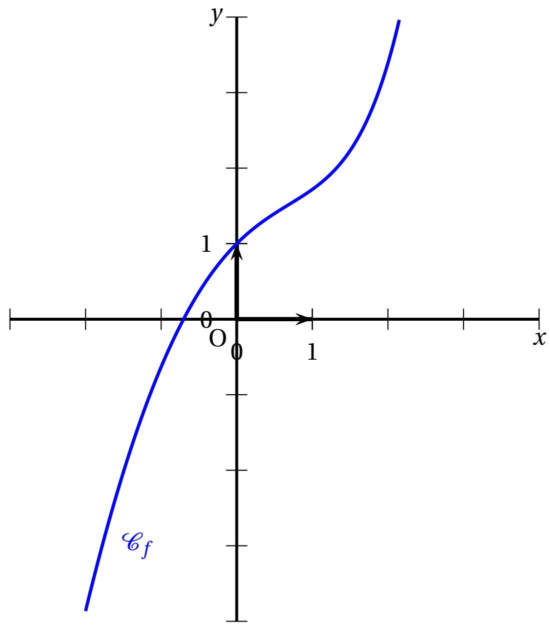
N. B. La question 5. a. a été transformée (elle demandait d'indiquer la nature de $(\mathscr{E})$ et de placer les sommets de $(\mathscr{E})$) afin de tenir compte des modifications de programme. Par ailleurs, cet exercice peut être traité désormais dans le cadre de l'enseignement obligatoire.

PROBLÈME **11 POINTS**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x - x^2$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter et à rendre avec la copie.



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x$ et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction f

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par O. On notera A son point de contact avec $\mathscr{C}_f$. Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$.

Partie B : Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0 et justifier que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote.
2. **a.** Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x - x^2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Soit u la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe
   $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - x^2$. Étudier le sens de variation de u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   c. Déterminer le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.

   d. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   e. En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de g.

Partie C : Construction de $\mathscr{C}_g$

1. On se propose de construire le point $S(a\ ;\ g(a))$ où a est le réel déterminé dans la question B. 2. d.

a. Montrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.

b. En utilisant ce résultat, établir que a est l'abscisse du point A défini dans la première partie.

c. Justifier que l'ordonnée de S est $f'(a)$ et placer S sur le dessin.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

Soit G la primitive de g sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ qui s'annule pour $x = 1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de G sur $[1\,;\,2]$.

2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra $1,55$ comme valeur approchée de $G(2)$ à 10^{-2} près.

3. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier que l'intégrale I calculée dans la première partie peut s'écrire

$$I = \int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. En utilisant une intégration par parties, établir que $I = 2G(2) - J$ et en déduire une valeur approchée de J, à 10^{-2} près.