

❧ Baccalauréat S La Réunion juin 2004 ❧

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1	0	1

Sa courbe représentative \mathcal{C} et son asymptote Δ , d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.
2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0 ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$.
2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2 ; 3 ; 4\}$.
3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
Procéder de même pour la suite (v_n) . En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i , $1+i$ et $-1+i$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z , associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz+2}{z-i}.$$

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application f .

- b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , on a la relation :

$$(z' - i)(z - i) = 1.$$

- c. Soit D le point d'affixe $1 + 2i$. Placer les points A , B , C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).

Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l'application f .

2. Soit R un nombre réel strictement positif.

Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i , alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?
- b. Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} . Déterminer l'image de la droite \mathcal{D} privée du point A par l'application f .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

- Soit p un nombre premier impair.
 - Montrer qu'il existe un entier naturel k , non nul, tel que $2^k \equiv 1 \pmod{p}$.
 - Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n , alors $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.
 - Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b , que si $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, alors b divise n .
- Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour p un facteur premier de A .
 - Justifier que $2^q \equiv 1 \pmod{p}$.
 - Montrer que p est impair.
 - Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant 1. que b divise q . En déduire que $b = q$.
 - Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \pmod{2q}$.
- Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève un demi-point; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B₁, 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B₂, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B₁. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A : } \frac{\binom{120}{3} + \binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$$

$$\text{B : } \frac{3}{120}$$

$$\text{C : } \binom{10}{3} \times \left(\frac{120}{6000}\right)^3 \times \left(\frac{5880}{6000}\right)^7$$

$$\text{D : } \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{120}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B₁ est :

$$\text{A : } 0,98$$

$$\text{B : } \frac{0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,6 \times 0,02}$$

$$\text{C : } 0,6 \times 0,98$$

$$\text{D : } \frac{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A : } e^{-\frac{2500}{2000}}$$

$$\text{B : } e^{\frac{5}{4}}$$

$$\text{C : } 1 - e^{-\frac{2500}{2000}}$$

$$\text{D : } e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

$$E = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

- a. L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ est égale à :

$$\text{A : } \lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$\text{B : } -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} +$$

$$\text{C : } \lambda te^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} -$$

$$\text{D : } te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda}$$

- b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

$$\text{A : } 3\,500$$

$$\text{B : } 2\,000$$

$$\text{C : } 2\,531,24$$

$$\text{D : } 3\,000$$

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

On désigne par f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
- (2) $f'(0) = 1$,
- (3) la fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} .

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.

- b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
- (4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .
3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
- Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
 - Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
 - En déduire les fonctions u et v .
 - En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. a. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans \mathbb{R} .
- b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

À compléter et à rendre avec la copie

