Baccalauréat S La Réunion juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.
2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0\,;\,1]$ et $[1\,;\,+\infty[$.
2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2\,;\,3\,;4\}$.
3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}.$$

1. **a.** Déterminer les images de B et de C par l'application f.

   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

$$\left(z' - \mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1.$$

c. Soit D le point d'affixe 1 + 2i. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).

Déduire de la question précédente une construction du point D′ image du point D par l'application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif.

Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathcal{D}$ privée du point A par l'application f.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.

On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$ **B :** $\dfrac{3}{120}$

C : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$ **D :** $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

A : $0,98$ **B :** $\dfrac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02}$

C : $0,6\times 0,98$ D : $\dfrac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$ **B :** $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$ **C :** $1-\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$ **D :** $\mathrm{e}^{-\frac{2000}{2500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

$\mathrm{E} = \lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$

a. L'intégrale $\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A : $\lambda\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **B :** $-t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}$ **C :** $\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda$ **D :** $t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 **B :** 2 000 **C :** 2 531,24 **D :** 3 000

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $\left[f'(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.
   b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
   (4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
3. On pose : $u = f'+f$ et $v = f'-f$.
   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
   c. En déduire les fonctions u et v.
   d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

4. **a.** Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. **a.** Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

À compléter et à rendre avec la copie