

∞ La Réunion juin 1961 ∞

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

S'il y a q multiples de k parmi les nombres $1, 2, \dots, n$, combien peut-il y avoir de multiples de k parmi les nombres $n+1, n+2, \dots, 2n$?

Prenant pour k les puissances des nombres premiers, montrer que

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3.\dots n}$$

est toujours un entier.

II

Résoudre

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1.$$

III

En un lieu donné on observe le passage supérieur au méridien de α Croix du sud à une hauteur de $62^\circ 17' 45''$ au-dessus de l'horizon et le passage inférieur de cette même étoile à une hauteur de $18^\circ 3' 5''$.

Quelles sont la latitude du lieu d'observation et la déclinaison de α Croix du sud?

IV

1. A, B, C et D étant quatre points distincts d'un cercle, comparer les directions des bissectrices des trois couples de droites AB et CD, AC et BD et enfin AD et BC.
2. Réciproquement, que peut-on dire si deux des trois couples de droites considérés ci-dessus ont mêmes directions de bissectrices?
3. Soit P la parabole dont l'équation, rapportée à des axes perpendiculaires convenables, est $2py = x^2$ (p étant une constante, x et y les deux coordonnées); soient A, B, C et D quatre points distincts de P, d'abscisse respectives x_1, x_2, x_3 , et x_4 .
Trouver une condition portant sur x_1, x_2, x_3 , et x_4 nécessaire et suffisante pour que les bissectrices de AB et CD soient parallèles aux axes.
De la symétrie de la condition trouvée déduire que A, B, C et D sont sur un cercle si les bissectrices de AB et CD sont parallèles aux axes.
4. Étudier le système

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta, \\ \alpha + \beta = \gamma + \delta \end{cases}$$

Montrer ensuite que, si A, B, C et D sont à la fois sur P et sur un cercle, les trois couples AB et CD, AC et BD et enfin AD et BC ont leurs bissectrices parallèles aux axes (d'où résulte qu'un cercle et une parabole ont, au plus, quatre points communs).

5. Soient A, B, C et D quatre points distincts d'un cercle. On cherche les paraboles passant par ces quatre points; montrer que les axes des paraboles passant par A, B, C et D passent par I, milieu du segment joignant les milieux de AB et CD.

Les axes des paraboles passant par A, B, C et D sont alors deux droites perpendiculaires, que l'on déterminera; utilisant ces deux droites comme axes de coordonnées, comment peut-on achever la détermination de ces paraboles?

Combien existe-t-il de paraboles passant par quatre points distincts d'un cercle?