∽ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∾
La Réunion juin 1963

EXERCICE 1

Pour quelles valeurs de x la fonction v1+"X+ 1

$$y = \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}$$

est-elle définie ?
Calculer sa dérivée.

EXERCICE 2

Résoudre et discuter l'équation suivante, où x est l'inconnue et a un paramètre :

$$\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1} = a.$$

EXERCICE 3

On donne un point F et une droite (Δ) ne passant pas par F et l'on se propose d'étudier les hyperboles (H) admettant F pour foyer et (Δ) pour asymptote.

1. Rappeler sans démonstration comment, connaissant un foyer et le cercle principal d'une hyperbole, on peut obtenir les différentes tangentes de cette hyperbole, ainsi que ses asymptotes.

   Montrer qu'il existe une infinité d'hyperboles (H), en étudiant leurs cercles principaux.
2. Trouver le lieu géométrique du second foyer, F$'$, et l'enveloppe de la deuxième asymptote, (Δ'), de l'hyperbole (H).
3. (L), (D), (D$'$) désignant respectivement l'axe non focal de H et les directrices associées à F et F$'$, déterminer les enveloppes de ces trois droites.
4. Montrer que les sommets, A et A$'$, de l'hyperbole (H) se correspondent dans une inversion fixe, que l'on précisera.

   φ désignant la projection orthogonale de F sur (Δ), construire les inverses de la droite AA$'$ et du cercle de diamètre AA$'$ dans l'inversion de pôle φ qui laisse F invariant.

   En déduire, en obtenant son équation dans un système d'axes convenable, que l'inverse du lieu de A et A$'$ dans cette inversion est porté par l'hyperbole équilatère dont F et φ sont les sommets.
5. Montrer que, par un point M donné du plan, il passe en général deux hyperboles (H) qui ont un deuxième point commun, M$'$.

   Montrer que la droite MM$'$ passe par un point fixe et que les droites FM$'$ [1] ont leurs bissectrices fixes.

   (On pourra, dans cette question 5, utiliser une inversion de pôle F.)

1. Il s'agit certainement de l'angle des droites FM et FM$'$.