

∞ Baccalauréat La Réunion juin 1966 ∞

Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Le nombre e étant la base des logarithmes népériens et m étant un nombre réel donné, déterminer les valeurs de x dans l'ensemble des réels telles que

$$e^x + me^{-x} = 1.$$

Application numérique : $m = -12$.

Donner le résultat avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales.

EXERCICE 2

Dans tout le problème le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

1. On considère l'ensemble (H) des points $M(x ; y)$ dont les coordonnées vérifient la relation

$$(x + a)^2 - y^2 = a^2$$

a est une mesure de longueur donnée non nulle).

Construire l'ensemble (H) dans le repère donné, en précisant les sommets, les éléments de symétrie, les asymptotes.

Une droite (D) variable a pour équation

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Déterminer en fonction de φ les coordonnées, x et y , du point commun, M, autre que O, à la courbe (H) et à la droite (D).

2. On appelle (T) la transformation ponctuelle du plan qui, à tout point $M(x ; y)$ distinct de O, associe le point $P(X ; Y)$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4a^2 \overrightarrow{OM}}{OM^2}.$$

Déterminer les coordonnées, X et Y , du point P en fonction des coordonnées, x et y , de M. Exprimer, en fonction de φ , les coordonnées, X et Y , de P lorsque M est sur la courbe (H).

Montrer que l'ensemble (Γ) des points P associés aux différents points de (H) est identique à l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient la relation

$$Y^2 + X^2 = \frac{4aX^2}{2a - X}.$$

3. Étudier les variations de la fonction

$$Y = X \sqrt{\frac{2a + X}{2a - X}}.$$

Construire son graphe dans le repère donné.

En déduire l'ensemble (Γ) trouvé dans la question précédente.

4. On construit le cercle (C) ayant pour centre O et dont le rayon mesure $2a$.

Montrer que les points communs à ce cercle et à la courbe (H) sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Préciser la transformation (T) qui associe les courbes (H) et (Γ) . En déduire les points communs aux courbes (H) et (Γ) .