Baccalauréat ES La Réunion juin 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Jean-Paul, marathonien émérite, note ses temps de passage lors d'un entraînement :

Distances parcourues x_i en mètres	200	300	400	500
Temps de passage y_i en secondes	40	60	82	104

Pour les questions 1. et 2., les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. **a.** Représenter sur papier millimétré, le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série double, dans un repère orthogonal.

   On prendra pour unités : 1 cm pour 50 mètres sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 secondes sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique.

2. Déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série double $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ (à 10^{-4} près).

   Peut-on envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

3. Pour effectuer des prévisions, Jean-Paul utilise la droite $\mathcal{D}$ de coefficient directeur 0,21 passant par le point G.

   a. Déterminer alors une équation de $\mathcal{D}$.

   b. Tracer $\mathcal{D}$ sur le graphique.

   c. Calculer le temps de passage prévisible aux 1 000 m.

   d. En fait, aux 1 000 m, Jean-Paul a un temps de passage de 220 secondes.

   Par rapport à la valeur réelle, calculer (à 0,01 près) le pourcentage d'erreur commise dans sa prévision de temps de passage aux 1 000 m.

4. Peu satisfait de ses prévisions sur des distances plus longues, Jean-Paul recherche pour la série ci-dessous un ajustement par une fonction trinôme du second degré :

Distances parcourues x_i en km	0	0,2	1
Temps de passage y_i en secondes	0	40	220

   a. Déterminer a, b, c pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les trois points de ce nuage.

   b. Aux 2 000 m, Jean-Paul a un temps de passage de 8 minutes.

   Laquelle des deux méthodes d'ajustement permet la meilleure prévision ?

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En annexe 1 est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f.
En annexe 2 est donnée la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative d'une fonction g.
L'unité est Ie cm.
La droite (T) est la tangente en A à $\mathcal{C}_f$.
La droite (T$'$) est la tangente en B $\mathcal{C}_g$.

1. **a.** Lire $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.

   b. La fonction f' étant la dérivée de la fonction f, donner, en justifiant, $f'(1)$ et $f'(5)$.

   c. Déterminer alors une équation de la droite (T).

d. La fonction f étant définie par $f(x) = 3x - 8 + \dfrac{12}{x+1}$ calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 5$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

2. **a.** Lire $g(1)$, $g(4)$, $g(9)$.

b. Donner en justifiant, $g'(9)$.

3. Soit u la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par $u(x) = (g \circ f)(x)$.

a. Déterminer $u(0)$, $u(1)$ et $u(5)$.

b. Calculer $u'(5)$.

c. En utilisant le sens de variation de chacune des fonctions f et g donner le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Exercice 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (r_n) la suite définie, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} r_1 & = & 0,6 \\ r_{n+1} & = & 0,5r_n + 0,4 \end{array}\right.$$

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = r_n - 0,3$.

a. Prouver que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Déterminer u_1.

b. En déduire l'expression du terme général de (u_n) et de celui de (r_n) fonction de n.

c. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, la suite (r_n) a une limite que l'on calculera.

2. Amateur de jeux vidéo, Albert fait l'acquisition d'un jeu de voitures de course.
Lors de son premier essai, il a seulement 6 chances sur 10 de terminer le circuit indemne.
S'il réussit le n-ième esai, sa probabilité de réussir l'essai suivant est 0,9.
S'il manque le n-ième essai, sa probabilité de réussir l'essai suivant est de 0,4.
Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité de l'évènement R_n « Albert réussit le n-ième essai ».

a. À partir des données du texte, évaluer p_1, et les probabilités conditionnelles, suivantes : $p\left(R_{n+1}/R_n\right)$ et $p\left(R_{n+1}/\overline{R_n}\right)$.

b. Déterminer en fonction de p_n , les probabilités suivantes : $p\left(\overline{R_n}\right)$,
$p\left(R_{n+1} \cap R_n\right)$ et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$.

c. En déduire que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

d. Que nous apprend sur le jeu la réponse à la question **1. c.**?

PROBLÈME **8 points**

L'objet de ce problème est de rechercher un coût moyen de production minimal, connaissant le coût marginal.

I - Des résultats préliminaires susceptibles d'être utilisés ensuite

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 2 + \text{e}^{-x}.$$

   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer f' dérivée de f, ainsi que le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c. Établir le tableau de variations de la fonction f.

   d. Prouver que, dans $[0 ; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α.
   Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

   e. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

2. Montrer que la dérivée de la fonction $g\ :\ x \mapsto x\text{e}^{-x}$ est la fonction
   $g'\ :\ x \mapsto (1 - x)\text{e}^{-x}$.

II - Recherche du coût total

Une usine fabrique un produit dont le coût marginal C **en milliers d'euros**, est donné par la formule :

$$C(x) = 3x^2 - 4x + 2 + (x - 1)\text{e}^{-x}.$$

x représentant la quantité de produit en centaines de grammes.
On rappelle que le coût marginal C peut être assimilé à la dérivée du coût total C_{T}.
Déterminer $C_{\text{T}}(x)$ sachant que $C_{\text{T}}(0) = 0$.

III

Pour une production de x **centaines de grammes** on appelle $C_m(x)$ le coût moyen d'un **gramme**, en milliers d'euros. La fonction C_m est définie sur $[0 ; +\infty[$.

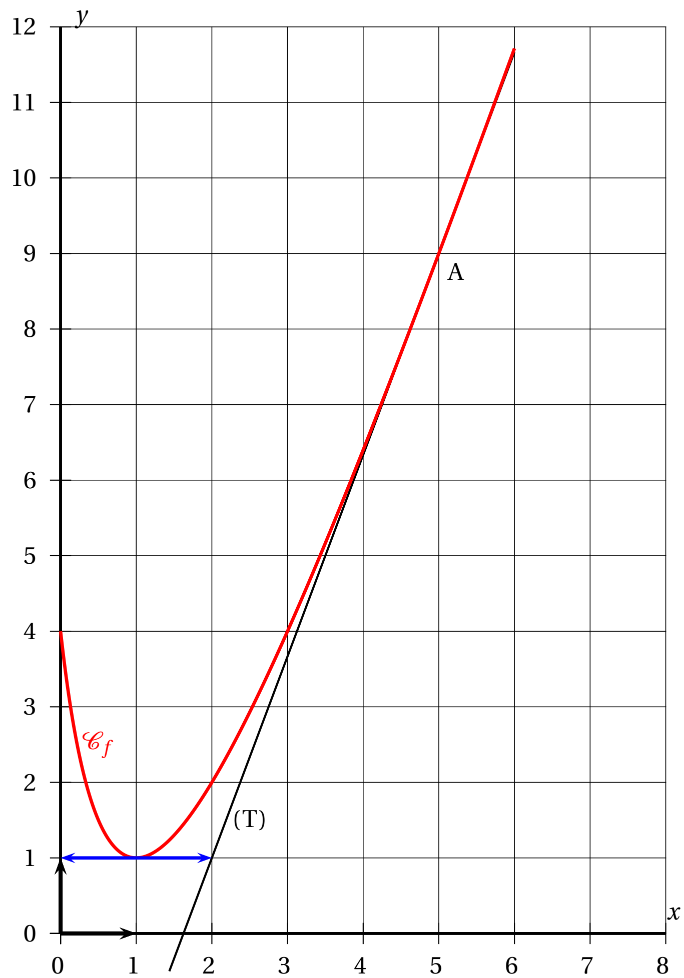
1. Prouver que $C_m(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2 - \text{e}^{-x}}{100}$.
2. **a.** Calculer $C'_m(x)$ et prouver que $C'_m(x)$ et $f(x)$ ont le même signe.

   b. En déduire les variations de C_m. On ne demande pas les calculs de limites.

   c. Donner une valeur approchée de la production donnant un coût moyen minimal.

   d. Calculer, au centième près, le coût moyen en euros pour une production de 76 grammes.

ANNEXE 1



ANNEXE 2