Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat La Réunion juin 1965 ∽

Série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Tous les nombres envisagés sont réels.

1. Étudier la variation de la fonction

$$y = 2\frac{x-2}{x^2-4x-5}$$

et tracer le graphe (C) [axes orthonormés].

2. Déterminer a et b tels que, pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine de définition de la fonction, on ait

$$2\frac{x-2}{x^2-4x-5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}.$$

3. Calculer l'aire S limitée par (C), l'axe $x'\text{O}x$ et les deux droites $x = \lambda, x = \lambda\text{e}$ (e base des logarithmes népériens et $\lambda > 5$).
Cette aire a-t-elle une limite si $\lambda \to +\infty$?

EXERCICE 2

Ce problème est un problème plan ; les axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ sont orthonormés et tous les segments sonL mesurés avec le même segment unitaire.
On considère la parabole (P) de foyer O et de directrice $y = 2$.

1. Former l'équation de (P).
2. Soit la droite (D) $y = ax+b$; comment choisir a et b pour que (P) et (D) soient tangentes ?
3. On envisage la transformation ponctuelle (T) qui, au point $m(x~;~y)$, associe le point $M(X~;~Y)$ tel que

$$X = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

On pose $\left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\,\overrightarrow{\text{O}m}\right) = \alpha, \left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\,\overrightarrow{\text{O}M}\right) = \beta \quad (\text{mod.}2\pi)$.
Calculer $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta, \text{O}M \times \text{O}m$ en fonction de x et de y, puis préciser la transformation (T) ; donner alors, si possible sans aucun calcul, les expressions de x et de y en fonction de X et de Y.

4. m est dorénavant, et pour toute la suite, la projection orthogonale de O sur (D) ; calculer successivement :

   x et y en fonction de a et de b ;

   a et b en fonction de x et de y ;

   a et b en fonction de X et de Y.

5. (D) est maintenant tangente à (P) ; préciser l'ensemble (ou lieu) (L) des points M.
Quelle est la transformation classique (non ponctuelle) qui permute (P) et (L).