

☞ Baccalauréat La Réunion septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

1. Mettre le trinôme bicarré $x^4 - 5x^2 + 4$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
2. Construire le graphe de la fonction $y = x^4 - 5x^2 + 4$ relativement à un système d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ orthonormé.
3. La portion du graphe correspondant aux valeurs de x de l'intervalle $-2 \leq x \leq 2$ comprend trois arcs, limitant chacun, avec le segment correspondant de $x'Ox$, un domaine, dont l'aire sera regardée comme positive ou négative suivant qu'il est situé, par rapport à $x'Ox$, du côté de Oy ou du côté de Oy' .
Calculer la somme algébrique des aires des trois domaines précédents.

II.

Soit un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle « formules de la transformation T » les relations

$$X = f(x; y), \quad Y = g(x; y),$$

qui permettent de déterminer le point $M(X; Y)$, transformé de $m(x; y)$ par T .

Partie A

1. Montrer que le système

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{ky}{x^2 + y^2},$$

où k est un nombre réel non nul, caractérise l'inversion de pôle O , de puissance k .

2. Donner les formules caractérisant la translation de vecteur $h\vec{i}$, h étant un nombre réel non nul.

Partie B

On définit la transformation $U = T \circ J$, produit de l'inversion J de pôle O de puissance -3 (effectuée d'abord) par la translation T de vecteur $4\vec{i}$.

1. Montrer que la transformation réciproque U^{-1} de U est la transformation $U^{-1} = J \circ T^{-1}$, où T^{-1} est la translation réciproque de T .
2. Donner les formules de la transformation U et celles de la transformation U^{-1} .
Déterminer les points doubles de U .
3. Déterminer la courbe transformée par U du cercle (γ) d'équation

$$x^2 + y^2 - 3x = 0.$$

4. ω étant le centre de (γ) , tout point p de (γ) est déterminé par

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\omega p}\right) = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Former, en fonction du paramètre φ , l'équation de la tangente (D_p) en p à (γ) .

Trouver, par des méthodes de géométrie analytique, la courbe (C_p) transformée de (D_p) par U . Retrouver géométriquement le résultat.

5. (C_p) est en général un cercle. Former l'équation de l'ensemble des centres des cercles (C_p) lorsque φ varie.