Durée : 4 heures

Baccalauréat C Laos septembre 1968

EXERCICE 1

En remarquant que l'on a $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$:

1. démontrer que le nombre

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \quad (n \text{ entier positif})$$

   est divisible par 111 quel que soit n et qu'il est également divisible par 7 et 13 si n est impair.

2. démontrer que le nombre

$$B = 109n + 106n + 103n + 1$$

   est divisible par 7, 11 et 13 si n est impair et, dans les autres cas, déterminer le reste de la division de ce nombre par 7, 11, 13 et 111.

EXERCICE 2

Soit une ellipse (E) ; O est son centre, F et F′ ses foyers, A et A′ les sommets du grand axe, B et B′ les sommets du petit axe ;

$$\text{FF}' = 2R \quad \text{et} \quad \text{AA}' = 2R\sqrt{2}.$$

1. Soit (D) et (D′) les tangentes à (E) respectivement en B et B′. La deuxième tangente à (E) issue d'un point M de (D) coupe (D′) en P'. Indiquer la construction de cette tangente et montrer que

$$(\text{MB, MF'}) = (\text{MF, MP}) + k\pi$$

   (k entier positif, négatif ou nul). En déduire que MP′ est tangente au cercle circonscrit au triangle MFF′.

2. Montrer que le cercle de diamètre MP′ est orthogonal à tout cercle passant par F et F′.

3. Quelles sont, par rapport au cercle (O) de centre O et de rayon R, les polaires de M et de P′ ? Q étant le deuxième point d'intersection de (O) avec BP′, B′Q coupe (D) en P.

   Montrer que M est le milieu de BP ;

   MP' coupe B'P en R et BB' en S. Montrer que R et S sont conjugués harmoniques par rapport à M et P′.

   En déduire que S, F, F′ et R appartiennent à un même cercle et que R est le point de contact de MP′ avec (E).