Baccalauréat C Laos juin 1974

EXERCICE 1

E étant un espace vectoriel euclidien de dimension 3, soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthononnée de E.
On considère l'application linéaire f de E dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\vec{\imath}\right) & = & 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\\ f\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}\\ f\left(\vec{k}\right) & = & \vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\end{array}\right.$$

1. Montrer que $f \circ f$ est la composée d'une homothétie vectorielle h et de f
($f \circ f = h \circ f$).
2. Déterminer le noyau E_1 de f et l'image E_2 de E par f. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et qu'ils sont orthogonaux.
3. Soit p la projection orthogonale sur E_2.
Déduire des questions précédentes l'égalité : $f = h \circ p$.

EXERCICE 2

Soit $\quad I_a = \displaystyle\int_0^a x^2 e^{-x}\,dx$, a étant un nombre réel positif donné.

1. Déterminer, en intégrant par parties, l'expression I_a en fonction de a.
2. Montrer que I_a admet une limite finie quand a tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

On définit une suite réelle u par la donnée des deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \qquad (1)$$

a et b étant des réels donnés non nuls.

Partie A

1. Calculer u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 en fonction de u_1, u_2, a et b.
2. **a.** On suppose $a^2 + 4b > 0$. Montrer qu'il existe deux nombres réels distincts α et β tels que

$$\alpha + \beta = a \quad \text{et} \quad \alpha\beta = -b.$$

   b. Montrer que la suite v définie par

$$v_{n+1} = u_{n+1} - au_n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

   est une suite géométrique de raison 3.
   Qu'en déduit-on pour la suite w définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$?

   c. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.
   En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.

Partie B

On suppose $^2a+4b=0$.

1. Montrer que la relation (1) peut s'écrire

$$u_{n+1}-\alpha u_n=\alpha\left[u_n-\alpha u_{n-1}\right]$$

2. On pose $u_n=\alpha^n s_n$. Montrer que la suite s est une suite arithmétique. En déduire l'expression de s_n puis de u_n en fonction de $n, \alpha,\ u_1$ et u_2.

3. Montrer que l'expression trouvée pour u_{n+1} est la limite de celle obtenue dans la première partie quand on fait tendre β vers α.

Partie C

On suppose $a^2+4b<0$

1. On désigne par α et β les racines complexes de l'équation $x^2-ax-b=0$. Montrer qu'il existe un réel positif r et un nombre $\theta\in]0\ ;\ \pi[$ tels que la relation (1) s'écrive :

$$u_{n+1}=u_n 2r\cos\theta-r^2u_{n-1}\qquad (2)$$

2. Montrer qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=r^n(A\cos n\theta-B\sin n\theta)$$

3. a. En déduire la relation

$$u_{n+1}=\frac{r^{n-1}}{\sin\theta}\left[u_2\sin n\theta-ru_1\sin(n-1)\theta\right]$$

b. En comparant le nombre u_7 donné par cette relation et l'expression trouvée pour u_7 dans A, exprimer $\sin 5\theta$ et $\sin 6\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.