Baccalauréat C Laos juin 1974

EXERCICE 1

E étant un espace vectoriel euclidien de dimension 3, soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée de E.
On considère l'application linéaire f de E dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\vec{\imath}\right) & = & 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} \\ f\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \\ f\left(\vec{k}\right) & = & \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k} \end{array}\right.$$

1. Montrer que $f \circ f$ est la composée d'une homothétie vectorielle h et de f ($f \circ f = h \circ f$).
2. Déterminer le noyau E_1 de f et l'image E_2 de E par f. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et qu'ils sont orthogonaux.
3. Soit p la projection orthogonale sur E_2.
   Déduire des questions précédentes l'égalité : $f = h \circ p$.

EXERCICE 2

Soit $\quad I_a = \displaystyle\int_0^a x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, a étant un nombre réel positif donné.

1. Déterminer, en intégrant par parties, l'expression I_a en fonction de a.
2. Montrer que I_a admet une limite finie quand a tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

On définit une suite réelle u par la donnée des deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \qquad (1)$$

a et b étant des réels donnés non nuls.

Partie A

1. Calculer u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 en fonction de u_1, u_2, a et b.
2. **a.** On suppose $a^2 + 4b > 0$. Montrer qu'il existe deux nombres réels distincts α et β tels que

$$\alpha + \beta = a \quad \text{et} \quad \alpha\beta = -b.$$

b. Montrer que la suite v définie par

$$v_{n+1} = u_{n+1} - au_n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

est une suite géométrique de raison 3.
Qu'en déduit-on pour la suite w définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$?

c. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.
En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.

Partie B

On suppose $^2a + 4b = 0$.

1. Montrer que la relation (1) peut s'écrire

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \alpha\left[u_n - \alpha u_{n-1}\right]$$

2. On pose $u_n = \alpha^n s_n$. Montrer que la suite s est une suite arithmétique. En déduire l'expression de s_n puis de u_n en fonction de n, α, u_1 et u_2.

3. Montrer que l'expression trouvée pour u_{n+1} est la limite de celle obtenue dans la première partie quand on fait tendre β vers α.

Partie C

On suppose $a^2 + 4b < 0$

1. On désigne par α et β les racines complexes de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
Montrer qu'il existe un réel positif r et un nombre $\theta \in]0\ ;\ \pi[$ tels que la relation (1) s'écrive :

$$u_{n+1} = u_n 2r\cos\theta - r^2 u_{n-1} \qquad (2)$$

2. Montrer qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r^n(A\cos n\theta - B\sin n\theta)$$

3. **a.** En déduire la relation

$$u_{n+1} = \frac{r^{n-1}}{\sin\theta}\left[u_2\sin n\theta - r u_1 \sin(n-1)\theta\right]$$

b. En comparant le nombre u_7 donné par cette relation et l'expression trouvée pour u_7 dans A, exprimer $\sin 5\theta$ et $\sin 6\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.