**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C juin 1975 Laos ∾

## EXERCICE 1

$A$ est un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal :

$$\overline{r_n r_{n-1} \cdots r_2 r_1 r_0}$$

1. Ayant écrit $A$ sous la forme $10K + r_0$ où $K$ est un entier naturel, montrer que $5A$ est congru à $5r_0 - K$ modulo 17.
2. Montrer que $A$ est divisible par 17 si et seulement si $5r_0 - K$ est divisible par 17.

## EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien, on considère le triangle équilatéral ABC, Le milieu I du bipoint (B, C) se projette orthogonalement en H sur la droite AB.

1. Démontrer que H est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 1 et 3.
2. Soit G le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 1, 5, 2 ; montrer que G est le milieu du bipoint (I, H).

## PROBLÈME

E est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. $\lambda$ est un nombre réel non nul. On considère les applications $h$ et $p$ de E dans E qui au point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ associent respectivement les points de coordonnées $(\lambda x ; \lambda y)$ et $(0 ; y - x)$.

### Partie A

*Dans cette première partie $\lambda$ est donné*

1. Caractériser chacune des applications $h$ et $p$. Sont-elles des bijections de E dans E ?
2. On note $N$ l'image de $M$ par $h \circ p$. À tout point $M$ de E on associe le point $P$ tel que le vecteur $\overrightarrow{\text{O}P}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{\text{O}M} + \overrightarrow{\text{O}N}$.
   On désigne par $\mathscr{A}_\lambda$ l'application de E vers E qui, au point $M$, fait correspondre le point $P$.
   Montrer que les coordonnées $(X ; Y)$ de $P$ s'expriment, en fonction de celles de $M$, par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} X & = & x \\ Y & = & (\lambda + 1)y - \lambda x \end{array}\right.$$

   À quelle condition .$\mathscr{A}_\lambda$ est-elle bijective ?

### Partie B

*À chaque $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ on associe l'application $\mathscr{A}_\lambda$*

Soit $A$ l'ensemble des applications $\mathscr{A}_\lambda$ bijectives, et $\text{Id}_\text{E}$ l'application de E vers E qui à $M$ associe $M$ lui-même. Montrer que $A \cup \{\text{Id}_\text{E}\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

### Partie C

*Dans cette question* $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ *est donné*

1. Quel est l'ensemble des points invariants par $\mathscr{A}_\lambda$ ?
2. Soit $(D)$ la droite d'équation : $ux + vy + w = 0$.
   Démontrer que l'ensemble des images par $\mathscr{A}_\lambda$ des points de $(D)$ est en général une droite $(D')$ ; on dira avec précision dans quel cas il n'en est pas ainsi.
3. Trouver toutes les droites invariantes par $\mathscr{A}_\lambda$.

**Partie D**

*Dans toute la partie, on suppose que* $\lambda$ *est égal à* 1

1. Écrire une équation de l'ensemble $(\gamma)$ des images par $\mathscr{A}_1$ des points du cercle de centre O et de rayon 1.
2. Soit $(\Delta_m)$ la droite d'équation : $mx - y = 0$.
   Montrer que $(\Delta_m) \cap (\gamma)$ n'est pas vide. Soit $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ un point de cette intersection. Exprimer $\text{O}M^2$ en fonction de $m$.
3. Etudier les variations de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :
   $$f(m) = \text{O}M^2$$
   (On ne demande pas la représentation graphique).
4. On admettra que $(\gamma)$ est une conique ; déduire de l'étude précédente la nature de cette conique. Donner son équation réduite et son excentricité.