Baccalauréat C Laos et Japon juin 1973

EXERCICE 1

1. Étudier les variations de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

Étudier avec soin les branches infinies.
Dessiner la courbe représentative dans un plan P muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

2. La lettre a désigne un réel positif.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P dont les coordonnées x et y vérifient la proposition suivante :

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{et} \quad x + 1 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer l'aire $S(a)$ de l'ensemble E et la limite de $S(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle rectangle d'hypoténuse BC = 2a, 1 le milieu de (B, C). a) Démontrer que le point G, défini par 4 GA - ;- GB - GC = v, est le symétrique du point 1 par rapport au point A. b) Quel est l'ensemble F des points M du plan (A, B, C) tels ,que 4 MA 2 - MB2 - MC2 = - 4a2 (noter que A E F).

EXERCICE 3

Dans tout le problème, a et b désignent deux réels tels que $a^2 - b^2 = 1$, M_+ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & a \end{pmatrix}$, M_- l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}_+ \cup \mathrm{M}_-$.

1. a. Démontrer que toute matrice de M est inversible et déterminer les inverses des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que M est stable pour la multiplication des matrices. En est-il de même pour M_+ ; pour M_- ?

c. Démontrer que (M; $\times$) est un groupe dont (M_+ ; $\times$) est un sous-groupe commutatif.

d. Démontrer que tout élément de M_+ peut être considéré d'une infinité de façons comme le produit de deux éléments de M_-.

2. E est un plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. $\mathscr{E}$ est un plan affine associé à E, muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

À toute matrice m de M, on fait correspondre l'application affine f de $\mathscr{E}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{L'application linéaire } f \text{ admet } m \text{ pour matrice dans la base } \left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right),\\ f(\mathrm{O}) = \mathrm{O} : \text{le point O est invariant dans } f.\end{array}\right.$$

On définit ainsi trois ensembles d'applications affines F, F_+, F_- respectivement associées à M, M_+, M_-.

a. Soit f une application de F.
Calculer les coordonnées, x' et y', du point $f(\mathrm{P})$ en fonction des coordonnées, x et y, du point P en supposant d'abord que $m = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & a \end{pmatrix}$ ensuite que $m = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

b. k désignant un réel quelconque, quelle est la nature de l'ensemble H_k, d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = k$?

Construire H_0, H_1 H_{-1}.

Démontrer que, pour tout réel k, l'ensemble H_k, est globalement invariant dans toute application f de F.

c. Démontrer que tout élément de F est une symétrie par rapport à une droite (D) parallèlement à une direction (Δ).

Soit f l'application associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ a & -a \end{pmatrix}$.

Déterminer l'équation cartésienne de (D) et de la droite (D$'$) contenant O et de direction (Δ).

Montrer que (D) et (D$'$) sont homologues dans une symétrie orthogonale dont l'axe est une asymptote de H_k.

d. Démontrer que tout élément de F est une symétrie par rapport à une droite ou la composée de deux symétries par rapport à des droites.