ఌ Laos juin 1962 ఌ

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

Deux points, M et M′, décrivent respectivement deux cercles égaux, (O) et (O′), de manière que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{O}'\text{M}'}\right)$ ait une valeur constante.
Démontrer que la médiatrice de MM′ passe par un point fixe.

I

On considère la fonction

$$y_m = \frac{x^2+3x+4m}{x^2+(5m+1)x+3}$$

où x est la variable et m un paramètre.
À chaque valeur de m correspondent une fonction y_m et une courbe représentative, $(\mathscr{C}_m)$.

1. Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par trois points fixes, indépendants do m, dont on déterminera les coordonnées.
2. Dans toute la suite du problème, on choisira m de telle façon que le point P, intersection de $(\mathscr{C}_m)$ et de l'asymptote parallèle à $x'x$, ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
   Montrer que la fonction y_m ainsi déterminée est la fonction y_0.
   Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative, $(\mathscr{C}_0)$.
3. Former l'équation aux abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_0)$ et de la droite D d'équation $y = tx$.
   Discuter le nombre de points d'intersection, suivant le valeurs de t.
   Former les équations des tangentes issue de O à la courbe $(\mathscr{C}_0)$ et trouver les coordonnées des point de contact.
   Étudier la position de $(\mathscr{C}_0)$ par rapport à sa tangente en O.
4. Calculer la dérivée seconde de y_0 et les valeurs de x qui l'annulent.
   Montrer que les points correspondants de $(\mathscr{C}_0)$ sont alignés.
5. Dans le cas où D coupe $(\mathscr{C}_0)$ en deux points, A et B, distincts de O, trouver le lieu du milieu I de AB.
   Déterminer ses points d'intersection avec $(\mathscr{C}_0)$.