Laos juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Quels sont les restes respectifs de la division par 7 des six premières puissances de 10 :

$$10,\quad 10^2,\quad 10^3,\quad \dots,\quad 10^6?$$

Application : Déterminer n de façon que le nombre qui s'écrit dans le système décimal 3 725 n69 soit divisible par 7.

EXERCICE 2

On suppose que tg a et tg b sont les racines de l'équation à l'inconnue x

$$x^2 + px + q = 0.$$

Déterminer la relation entre p et q pour que $a + b = \dfrac{\pi}{3}$.

EXERCICE 3

On suppose le plan rapporté à un repère cartésien orthonormé d'origine O.

1. Étudier les variations et tracer le graphique, (C), de la fonction

$$y = 2\sqrt{x-1}.$$

   On désigne par (C$'$) la courbe symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

   Donner l'équation de la courbe (P) constituée par la réunion de (C) et (C$'$).

   Montrer que c'est une parabole, dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.

2. On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 2 et l'on considère l'ellipse (E) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-4} - 1 = 0.$$

   Donner en fonction de a les coordonnées des points communs aux courbes (P) et (E). On désigne par M le point d'ordonnée positive.

   Déterminer a pour que la tangente en M à la courbe (P) ait pour coefficient angulaire (appelé aussi coefficient directeur) le nombre 1.

   Quelle est alors cette tangente ?

3. Soit M$'$ le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. On désigne par S_T l'aire du triangle OMM$'$ et par S_E l'aire de l'ellipse (E).

   Montrer que le rapport ST)2 t' l' e(2 + e) . d' . 1 $u = \left(\dfrac{S_T}{S_E}\right)^2$ est égal a $\dfrac{e(2+x)}{\pi^2(1+e)^4}$ si e désigne le nombre $\dfrac{2}{a}$.

4. Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x(2+x)}{\pi^2(1+x)^4}$$

   pour $0 < x < 1$.

Tracer le graphique correspondant ; en déduire graphiquement, suivant les valeurs de k, le nombre d'ellipses (E) telles que le rapport u ait une valeur donnée positive, k.

5. Soit ω le point de coordonnées $(+3~;~0)$ et (Ω) le cercle de centre ω et de rayon $\sqrt{5}$.

Quels sont l'inverse du cercle (Ω) et l'inverse de la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) dans l'inversion de pôle F et de puissance -4, F étant le point de coordonnées $(+2~;~0)$?

Un cercle (Γ), dont le centre appartient à la courbe (P) et qui passe par F, coupe le cercle (Ω) en R et R$'$.

Calculer avec la précision permise par les tables l'angle aigu α des tangentes en R (ou R$'$) aux cercles (Ω) et (Γ). On donnera α en degrés, minutes et secondes.