Baccalauréat Laos septembre 1967
Mathématiques élémentaires

I.

Calculer la dérivée de la fonction

$$y = \cos^2 x(1 - \sin x).$$

Mettre cette dérivée sous la forme d'un produit de trois facteurs.
Calculer, avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales. la valeur de x comprise entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$, pour laquelle cette dérivée s'annule.

II.

Calculer, suivant les valeurs du réel x, le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

III.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
On appelle T la transformation ponctuelle qui, à un point M, de coordonnées x, y, fait correspondre le point $\mathrm{M}' = \mathrm{T}(\mathrm{M})$, de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l c c} x' & = & \dfrac{x}{2x-1} \\ y' & = & \dfrac{y}{2x-1} \end{array}\right.$$

si ces expressions sont définies.

1. Quel est l'ensemble, E, des points M tels que T(M) soit défini ?
   Montrer que la transformation T est involutive.
   Quel est l'ensemble des points M tels que T(M) = M ?
2. Soit une droite D distincte de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.
   Montrer que, si le point M appartient à D, le point $\mathrm{M}' = \mathrm{T}(\mathrm{M})$ appartient à une droite, D'.
   Quelle condition la droite D doit-elle vérifier pour qu'elle rencontre la droite D' ?
   Quel est, dans ce cas, le lieu du point de rencontre ?
3. Étudier successivement les deux cas particuliers suivants :
   a. la droite D passe par O ;
   b. la droite D passe par le point A de coordonnées $(+1 ; 0)$.
   Déduire de l'étude de ces deux cas particuliers une construction géométrique du point T(M) lorsque M n'appartient pas à la droite d'équation $y = 0$.
4. Soit C le cercle de diamètre OA. Montrer que l'ensemble des points $\mathrm{M}' = \mathrm{T}(\mathrm{M})$ tels que le point M appartienne au cercle C est une hyperbole, dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.

5. Soit Γ le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - \lambda x + \gamma = 0$$

et Γ_1 l'ensemble des points de Γ qui admettent un transformé par T.

Trouver une relation entre λ et γ qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour que Γ_1 se transforme en lui-même par T.

Montrer que, lorsqu'ils existent, les points d'intersection de Γ_1 avec l'axe des abscisses sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes.

Qu'en résulte-t-il pour les cercles Γ considérés ?