

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

A. P. M. E. P.

## SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

### Le GROUPEMENT CHIMISTE de 2001 à 2011

Métropole 2001 .....	3
Métropole 2002 .....	5
Métropole 2003 .....	7
Métropole 2004 .....	10
Métropole 2005 .....	13
Métropole 2006 .....	16
Métropole 2007 .....	20
Métropole 2008 .....	23
Métropole 2009 .....	27
Métropole 2010 .....	30
Métropole 2011 .....	33



# Brevet de technicien supérieur session 2001 - Chimiste

A. P. M. E. P.

## Exercice 1

10 points

Une entreprise fabrique des flacons destinés à contenir une substance particulière. Un flacon est dit conforme s'il vérifie un ensemble de critères définis par l'entreprise. On appelle  $p$  la proportion de flacons conformes dans l'ensemble de la production.

### Première partie

Un processus de contrôle de la conformité des flacons a été mis au point par l'entreprise. On s'intéresse dans cette partie aux risques d'erreurs de ce contrôle et on suppose que la proportion  $p$  de flacons conformes est égale à 0,8.

On prélève un flacon au hasard dans l'ensemble de la production. On note :

C l'évènement : « le flacon prélevé est conforme » ; on a donc  $P(C) = 0,8$ .

A l'évènement : « le flacon prélevé est accepté par le contrôle ».

Une étude préliminaire a permis d'estimer les risques d'erreurs de ce contrôle :

- la probabilité de refuser un flacon sachant qu'il est conforme est de 0,05 on a donc  $P(\bar{A}/C) = 0,05$ .
- la probabilité d'accepter un flacon sachant qu'il n'est pas conforme est de 0,1 on a donc  $P(A/\bar{C}) = 0,1$ .

1.
  - a. Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté sachant qu'il est conforme.
  - b. Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté par le contrôle.
  - c. Déterminer la probabilité qu'un flacon ne soit pas conforme sachant qu'il a été accepté par le contrôle. (Arrondir le résultat au centième).
2. On admet que la probabilité de choisir un flacon non conforme parmi ceux qui ont été acceptés par le contrôle est égale à 0,03.  
On prélève au hasard et avec remise des échantillons de 100 flacons dans l'ensemble des flacons qui ont été acceptés par le contrôle.  
On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de flacons non conformes de cet échantillon.
  - a. Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
  - b. On admet que la loi de  $X$  peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?  
Calculer, à l'aide de cette loi de Poisson, une valeur approchée de la probabilité de l'évènement  $(X > 5)$ .

### Seconde partie

On se propose de construire et d'utiliser un test unilatéral pour valider ou refuser, au seuil de risque 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion  $p$  de flacons conformes dans l'ensemble de la production, sur une période donnée, est égale à 0,8. (Hypothèse nulle  $H_0$  : «  $p = 0,8$  » ; hypothèse alternative  $H_1$  : «  $p < 0,8$  »).

Pour cela, on prélève au cours de cette période dans l'ensemble de la production des échantillons de 200 flacons, au hasard et avec remise.

On appelle  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe la proportion de flacons conformes de cet échantillon. On admet que la loi de  $F$  est une loi normale  $\mathcal{N}(p; \sigma)$ .

1. Sous l'hypothèse  $H_0$  :

- a. Montrer qu'une valeur approchée de  $\sigma$  est 0,03.
  - b. Déterminer le réel positif  $h$  tel que  $P(F \geq 0,8 - h) = 0,95$ . (Arrondir le résultat au centième).
2. Énoncer la règle de décision relative à ce test de validité d'hypothèse.
  3. Dans un échantillon de 200 flacons, on a trouvé 156 flacons conformes.  
Au vu de cet échantillon, doit-on, au seuil de risque 5 %, accepter ou refuser l'hypothèse ?

**Exercice 2****10 points**

L'objet de cet exercice est l'étude du potentiel électrique dans un électrolyte.

On considère un électrolyte, le chlorure de sodium NaCl, mis en solution dans l'eau à la température de 25 °C et de concentration  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

Un ion  $\text{Na}^+$  étant choisi, on prend son centre comme origine de l'espace rapporté à un repère.

Cet ion crée, en tout point de l'atmosphère ionique qui l'entoure, un potentiel électrique  $U$  fonction de la distance  $x$  de ce point au centre de l'ion considéré.

**1. Expression de  $U(x)$ .**

On admet que cette fonction  $U$  de la variable réelle  $x$ , avec  $x > 0$ , est solution de l'équation différentielle

$$(E) : x^2 U'' + 2xU' = b^2 x^2 U,$$

où  $b$  est une constante réelle strictement positive.

- a. Pour tout  $x > 0$ , on pose  $Y(x) = xU(x)$ .

Calculer  $Y'(x)$  et  $Y''(x)$ .

On considère l'équation différentielle  $(E_1)$   $Y'' - b^2 Y = 0$ .

Démontrer que  $Y$  est solution de  $(E_1)$  si et seulement si  $U$  est solution de  $(E)$ .

- b. Résoudre l'équation différentielle  $(E_1)$ .

En déduire, pour tout  $x > 0$ , l'égalité (i) :  $U(x) = \frac{1}{x} (Ae^{-bx} + Be^{bx})$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles.

**2. Calcul de la constante  $B$** 

Le potentiel étant nul à l'infini, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0$ .

Montrer, en utilisant l'égalité (i), qu'alors  $B = 0$ . (On montrera que si  $B$  était non nulle, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)$  serait égale à  $+\infty$ ). On a donc, pour tout  $x > 0$ ,

$$U(x) = \frac{A}{x} e^{-bx}.$$

**3. Calcul de la constante  $A$** 

- a. Soit  $\alpha$  un nombre réel supérieur ou égal à 4.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en fonction de  $\alpha$ , l'intégrale  $I(\alpha) = \int_4^\alpha x e^x dx$ .

$$I(\alpha) = \int_4^\alpha x e^x dx.$$

Déterminer la limite  $I$  de  $I(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

- b. L'expression de l'électroneutralité conduit à l'égalité  $A \cdot I = k$ , où  $k$  est une constante réelle positive. Exprimer  $A$  en fonction de  $b$  et de  $k$ .

En déduire que, pour tout  $x > 0$ ,  $U(x) = \frac{kb^2}{1+4b} \frac{1}{x} e^{-b(x-4)}$ .

**4. Tableau de variations de  $U$ , pour des valeurs particulières de  $b$  et de  $k$** 

On considère que, pour tout  $x > 0$ ,  $U(x) = \frac{0,16}{x} e^{-0,0325(x-4)}$ .

- a. Calculer  $U'(x)$  et étudier le sens de variations de  $U$ .
- b. Calculer la limite de  $U$  en 0.
- c. Donner le tableau de variations de  $U$ .

# Brevet de technicien supérieur session 2002 - Chimiste

A. P. M. E. P.

## Problème 1

8 points

Lorsqu'un fil conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. Désignons par  $\theta(t)$  la température du conducteur exprimée en degrés Celsius à l'instant  $t$  exprimé en secondes.

À l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ( $t = 0$ ), la température du conducteur est celle du milieu ambiant :  $\theta(0) = 18$  (condition initiale).

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle

$$(E) \quad \theta'(t) + 10k\theta(t) = 2, \quad t \geq 0$$

dans laquelle  $k$  est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

### Partie A

On suppose, dans cette partie, que le conducteur est parfaitement isolé, c'est-à-dire que  $k = 0$ .

1. Écrire l'équation différentielle correspondant à  $k = 0$  puis résoudre cette équation différentielle.
2. Représenter graphiquement les variations de  $\theta$  dans un repère orthogonal d'unité graphiques : 1 cm en abscisse pour 2 secondes et 1 cm en ordonnée pour 2 °C.
3. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 30 °C.

### Partie B

On suppose, dans cette partie, que le conducteur n'est pas thermiquement isolé et que  $k = 5 \times 10^{-3}$ .

1. Vérifier que la température du conducteur s'exprime par :  $\theta(t) = 40 - 22e^{-0,05t}$ .
2.
  - a. Calculer la température stationnaire du conducteur :  $\theta_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$ .  
Donner l'interprétation graphique de ce résultat.
  - b. Déterminer le développement limité de  $\theta$  au voisinage de  $t = 0$ , à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de  $\theta$  en son point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de  $t = 0$ .
3.
  - a. Étudier les variations de  $\theta$  en fonction de  $t$ .
  - b. Construire la courbe représentative de  $\theta$  sur le même graphique que dans la partie A.
  - c. Calculer la température du conducteur à l'instant  $t = 20$ .
  - d. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 39,99 °C.

## Problème 2

12 points

Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire  $X$  associant à chaque

flacon le volume de son contenu exprimé en  $\text{cm}^3$ . On suppose que  $X$  suit la loi normale de moyenne  $\mu$  (inconnue) et d'écart type  $\sigma = 0,036$ .

### Première partie

Dans cette partie, on prend pour  $\mu$  la valeur annoncée par le fournisseur :  $\mu = 43,041$ . Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque le volume de son contenu appartient à l'intervalle  $[42,970; 43,130]$ . On choisit un flacon au hasard dans la production.

1. Déterminer la probabilité pour qu'il soit conforme.
2. Trouver un intervalle centré en  $\mu$  dans lequel le volume a 85 % de chances de se trouver.

### Deuxième partie

À l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne  $\mu$  de la production, avec la valeur  $m = 43,041$  annoncée par le fournisseur. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume	142,930 ; 42,970[	[42,970 ; 43,010[	[43,010 ; 43,050[	[43,050 ; 43,090[	[43,090 ; 43,130]
Effectif	2	7	39	19	8

#### 1. Calcul de la moyenne

Calculer la moyenne de cet échantillon (arrondie à  $10^{-3}$  près) en faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celle du centre de chaque classe.

#### 2. Construction du test

On oppose l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu = m$  à l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu \neq m$ .

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la moyenne d'échantillonnage  $\bar{X}$ ? En préciser les paramètres.
- b. En se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ , déterminer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  près du réel  $h$  tel que :  $P(\mu - h \leq \bar{X} \leq \mu + h) = 0,95$ .
- c. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse  $H_0$  au seuil de risque de 5 %.
- d. Énoncer la règle de décision du test.

#### 3. Utilisation du test

Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5 %, que la valeur  $m$  annoncée pour  $\mu$  est correcte ?

# Brevet de technicien supérieur session 2003 - Chimiste

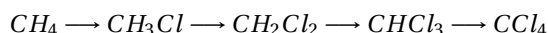
A. P. M. E. P.

## Exercice 1

13 points

Étude de la cinétique d'une réaction en chaîne.

On considère un réacteur dans lequel on fait réagir du  $CH_4$  dans du  $Cl_2$  en excès. Dans ce cas, on peut modéliser les réactions par des cinétiques d'ordre 1 :



On note  $a = [CH_4]_0$ , la concentration initiale en  $CH_4$  et  $k$  une constante réelle non nulle exprimée en  $\text{min}^{-1}$ . Le temps  $t$  est exprimé en minutes.

Les valeurs approchées seront arrondies au centième le plus proche.

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

### Partie A

$[CH_4]_t$ , étant la concentration en  $CH_4$  à l'instant  $t$ , on pose  $x(t) = \frac{[CH_4]_t}{a}$ . À l'instant  $t = 0$ , la concentration en  $CH_4$  est égale à  $a$  et donc  $x(0) = 1$ .

Les lois cinétiques donnent l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = -4kx \quad (1)$$

- Donner la solution générale de l'équation différentielle (1).
  - Déterminer la solution de l'équation (1) qui vérifie la condition initiale  $x(0) = 1$ .

$[CH_3Cl]_t$  étant la concentration en  $CH_3Cl$  à l'instant  $t$ , on pose

$$y(t) = \frac{[CH_3]_t}{a}$$

À l'instant  $t = 0$ , la concentration en  $CH_3Cl$  est nulle, donc  $y(0) = 0$ .

Les lois cinétiques donnent l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = -3ky + 4ke^{-4kt} \text{ qui s'écrit sous la forme :}$$

$$y' + 3ky = 4ke^{-4kt} \quad (2)$$

- Résoudre l'équation différentielle homogène associée :  
 $y' + 3ky = 0$ .
- Déterminer une solution particulière de l'équation (2) de la forme  $t \mapsto \lambda e^{-4kt}$  où  $\lambda$  est une constante réelle.
- Donner la solution générale de l'équation différentielle (2).
  - Déterminer la solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie la condition initiale  $y(0) = 0$ .

### Partie B

$[CH_2Cl_2]_t$  et  $[CHCl_3]_t$  étant les concentrations en  $CH_2Cl_2$  et  $CHCl_3$  à l'instant  $t$ , on pose  $z(t) = \frac{[CH_2Cl_2]_t}{a}$  et  $v(t) = \frac{[CHCl_3]_t}{a}$ . À l'instant  $t = 0$ , ces concentrations sont nulles et donc  $z(0) = v(0) = 0$ .

Les lois cinétiques donnent les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -2kz + 12k(e^{3kt} - e^{-4kt}) & (3) \\ \frac{dv}{dt} = -kv + 2kz & (4) \end{cases}$$

1. Montrer que  $v'(0) = 0$ .
2. **a.** Montrer que l'équation (4) s'écrit sous la forme :  $z(t) = \frac{1}{2k} [v'(t) + kv(t)]$ .  
**b.** En dérivant cette expression de  $z$ , exprimer  $z' = \frac{dz}{dt}$  en fonction de  $v' = \frac{dv}{dt}$  et de  $v'' = \frac{d^2v}{dt^2}$ .  
**c.** En reportant les expressions de  $z$  et de  $\frac{dz}{dt}$  dans l'équation (3), montrer que  $v$  vérifie l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants ( $E_1$ ) suivante :

$$v'' + 3kv' + 2k^2v = 24k^2(e^{-3kt} - e^{-4kt}) \quad (E_1)$$

3. Résoudre l'équation différentielle homogène ( $E_0$ ) associée :  $v'' + 3kv' + 2k^2v = 0$ .
4. Déterminer une solution particulière de l'équation ( $E_1$ ) de la forme  $t \mapsto \alpha e^{-3kt} + \beta e^{-4kt}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles.
5. Donner la solution générale de l'équation différentielle ( $E_1$ ).  
**On suppose maintenant que  $k = 0,1 \text{ min}^{-1}$ .**
6. Montrer que la solution  $v$  qui vérifie les conditions initiales  $v(0) = 0$  et  $v'(0) = 0$  est définie par :

$$v(t) = 4e^{-0,1t} - 12e^{-0,2t} + 12e^{-0,3t} - 4e^{-0,4t}$$

### Partie C

On considère la fonction  $v$  définie par tout réel  $t \geq 0$  par

$$v(t) = 4e^{-0,1t} - 12e^{-0,2t} + 12e^{-0,3t} - 4e^{-0,4t}.$$

1. **a.** Calculer la dérivée  $v'$  de  $v$ .  
**b.** Vérifier que la dérivée de  $v$  peut s'écrire sous la forme :

$$v'(t) = 0,4e^{-0,1t} (4e^{-0,1t} - 1) (e^{-0,1t} - 1)^2.$$

2. Étudier le signe de  $v'(t)$  en fonction de  $t$ . En déduire le tableau de variations de la fonction  $v$  sur l'intervalle  $[0 ; 75]$ .
3. Représenter graphiquement la fonction  $v : t \mapsto v(t)$  pour  $t \in [0 ; 75]$  dans un repère orthogonal d'unités graphiques, 1 mm sur l'axe des abscisses (1 cm représente donc 10 minutes) et 20 cm sur l'axe des ordonnées.

### Exercice 2

7 points

#### Partie I : plan d'expériences

Pour établir un modèle du rendement en trichlorométhane, on réalise un plan factoriel d'expériences complet portant sur deux facteurs  $X_1$  et  $X_2$  qui représentent la température et la durée du passage des gaz dans le réacteur. Ce plan d'expériences est construit selon l'algorithme de Yates.

On suppose que le rendement  $y$  du phénomène est modélisé par une expression de la forme :

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1 X_2 + \epsilon$$

où  $a_0, a_1, a_2, a_{12}$  sont des réels et  $\epsilon$  une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type  $\sigma$ , où  $\sigma$  est un réel supérieur à zéro.



On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

niveau	-1	1
durée $X_1$	10 minutes	20 minutes
température $X_2$	50°C	100°C

Les quatre expériences réalisées ont donné les résultats suivants :

expérience	1	2	3	4
durée	10 minutes	20 minutes	10 minutes	20 minutes
température	50°C	50°C	100°C	100°C
rendement	0,05	0,10	0,15	0,25

1. Établir la matrice complète des interactions.
2. Calculer les estimations ponctuelles des effets.
3. Donner l'expression du modèle.
4. Interprétation
  - a. Que représente le coefficient  $a_0$  par rapport à ces expériences ?
  - b. En interprétant des effets des deux facteurs, quelles sont les conditions optimales pour la fabrication du trichlorométhane ?

## Partie II : étude statistique

*Les valeurs approchées seront arrondies au millième le plus proche.*

On suppose que l'estimation ponctuelle de  $a_1$  est 0,038. On considère que l'effet du facteur  $X_1$ , est estimé par une variable aléatoire qui suit une loi normale d'écart type  $\sigma_e = 0,005$ .

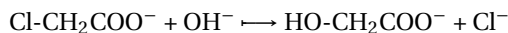
Calculer un intervalle de confiance de l'effet du facteur  $X_1$  au seuil de risque 5 %.

## Brevet de technicien supérieur session 2004 - Chimiste

### Exercice 1

**10 points**

On étudie la cinétique, à 100°C, de la substitution de l'atome de chlore de l'acide monochloroacétique par OH<sup>-</sup> selon la réaction :



- à l'instant  $t = 0$ , les concentrations des réactifs sont :  $[\text{OH}^-]_0 = a$  et  $[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-]_0 = \frac{a}{2}$ , où  $a$  est un réel donné tel que  $a > 0$ ,
- de même à l'instant  $t$ ,  $[\text{OH}^-] = a - x(t)$  et  $[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-] = \frac{a}{2} - x(t)$  avec  $0 \leq x(t) < \frac{a}{2}$ ,
- à l'instant  $t$ , le rendement de la réaction vaut  $r(t) = \frac{x(t)}{a/2}$ .

On admet que la vitesse de la réaction est donnée par la relation :

$$v = \frac{dx}{dt} = k \cdot [\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-] \cdot [\text{OH}^-]$$

où  $k$  est une constante liée à la réaction avec  $t$  s'exprimant en secondes.

### PARTIE A : étude théorique

1. Établir l'équation différentielle, notée (E), liant  $\frac{dx}{dt}$ ,  $x$ ,  $a$  et  $k$ .
2. Trouver les constantes  $\lambda$  et  $\mu$ , exprimées en fonction de  $a$ , telles que :

$$\text{pour tout } z \text{ de l'intervalle } \left[0; \frac{a}{2}\right] \quad \frac{2}{(a-x)(a-2x)} = \frac{\lambda}{a-x} + \frac{\mu}{a-2x}$$

3. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale  $x(0) = 0$  est telle que :  $\ln\left(\frac{a-x(t)}{a-2x(t)}\right) = \frac{ak}{2}t$  où  $\ln$  est la fonction logarithme népérien.
4. Montrer que  $r(t) = \frac{2(1-e^{At})}{1-2e^{At}}$  ou  $A = \frac{ak}{2}$  et  $r$  désigne le rendement de la réaction.
5. On considère dans cette question que  $A = 8 \cdot 10^{-4}$  ; déterminer alors le temps  $t$  (arrondi à la seconde) pour lequel le rendement  $r(t)$  de la réaction est égal à 0,9.

### Partie B : exploitation de résultats expérimentaux - détermination de $k$

On donne  $a = 1,65 \text{ mol.L}^{-1}$ . En posant  $y(t) = \ln\left(\frac{a-x(t)}{a-2x(t)}\right)$ , on obtient les résultats expérimentaux suivants :

$t$ (en secondes)	0	150	300	900	1 200	1 500	1 800	2 100	2 400
$x(t)$	0	0,097	0,222	0,688	0,902	1,130	1,408	1,550	1,938

1. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés sous la forme :  $y = mt + p$  où  $m$  et  $p$  sont des coefficients réels ;  $m$  sera donné avec une précision de  $10^{-6}$  et  $p$  avec une précision de  $10^{-3}$ .
2. En estimant que  $p$  est très proche de 0, et en utilisant le résultat de la modélisation de la 3<sup>e</sup> question de la partie A, déterminer une valeur approchée de la constante  $k$  de la réaction.

**Exercice 1****10 points***Étude expérimentale d'une colle à prise chimique*

Un fabricant met au point une nouvelle colle à prise chimique (par polymérisation). Durant la phase de collage, la résistance à la traction de la colle augmente de façon significative jusqu'à une valeur maximale. Le fabricant veut étudier la « durée de prise », c'est à dire la durée nécessaire pour que la résistance de la colle atteigne les trois quarts de sa valeur maximale.

**Partie A**

Le fabricant étudie l'influence de deux facteurs, la température et l'humidité ambiantes, sur la durée de prise de la colle.

Il note  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) la variable qui associe au facteur température (resp. humidité) son niveau, et  $Y$  la durée de prise étudiée (exprimée en minutes).

Il procède à un plan d'expérience factoriel  $2^2$  dont les résultats figurent ci-dessous.

Tableau 1 :

Température $X_1$	Humidité $X_2$	Durée de prise (en min) $Y$
18°C	faible	11
22°C	faible	9
18°C	forte	10
22°C	forte	13

niveau	-1	+1
température	18°C	22°C
humidité	faible	forte

Le modèle retenu pour  $Y$  est un modèle polynomial du type

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1X_2 + \epsilon$$

1. Reproduire et compléter la matrice complète des expériences et des effets, construite selon l'algorithme de Yates :

Expérience	Moyenne	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	$Y$
1					
2					
3					
4					
Effets	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_{12}$	

2. Calculer les estimations ponctuelles des effets principaux et de l'interaction. Écrire l'équation du modèle de  $Y$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .
3. Interprétation des effets :
  - a. Peut-on négliger l'interaction ?
  - b. À la température de 20 °C ( $T = 0$ ) comment varie la durée de prise lorsque l'humidité varie du niveau faible à fort ?

**Partie B**

Le fabricant effectue une deuxième campagne de mesures : il fait réaliser 100 collages indépendants, dans des conditions de température variables entre 18 °C et 22 °C. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Tableau 2 :

Durée de prise en minutes	[8,5; 9[	[9; 9,5[	[9,5; 10[	[10; 10,5[	[10,5; 11[	[11; 11,5[	[11,5; 12[	[12; 12,5[	[12,5; 13[
Effectif	0	6	9	17	22	27	13	4	2

1. Calculer la moyenne  $\bar{x}$  et l'écart type  $s$  de la série de mesures du tableau 2 (on donnera  $\bar{x}$  à 0,01 près et  $s$  à 0,1 près).
2. On admet ici que la durée de prise est une variable aléatoire  $X$  suivant une loi normale de moyenne  $\mu$  inconnue et d'écart-type  $\sigma = 0,8$ .  
On note  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui à une série quelconque de 100 collages indépendants associe sa durée moyenne de prise.  
Donner la loi de probabilité de  $\bar{X}$  en fonction de  $\mu$  et  $\sigma$ .
3. Le fabricant construit un test bilatéral pour tester l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu = 10,75$  au seuil de signification de 95 % ; l'hypothèse alternative est donc  $H_1 : \mu \neq 10,75$ .
  - a. Sous l'hypothèse  $H_0$ , déterminer la valeur arrondie à 0,01 près du réel  $h$  telle que :
 
$$P(\mu - h \leq \bar{X} \leq \mu + h) = 0,95.$$
  - b. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse  $H_0$  au seuil de signification de 95 %.
  - c. Énoncer la règle de décision du test.
  - d. Appliquer le test à la série de mesures du tableau 2 et conclure.

# Brevet de technicien supérieur

## session 2005 - Chimiste

### Exercice 1

9 points

Une entreprise fabrique des appareils de mesures qui doivent satisfaire à un cahier des charges.

#### Partie A

Une étude préalable a montré que 99 % des appareils fabriqués sont conformes au cahier des charges. On choisit, au hasard et de façon non exhaustive (tirages avec remise),  $n$  appareils dans l'ensemble de la production.

1. On suppose dans cette question que  $n = 10$ . Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'appareils conformes parmi les 10.
    - a. Pourquoi  $X$  suit-elle une loi binomiale? Quels sont les paramètres de cette loi?
    - b. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait au moins 9 appareils conformes parmi les 10; donner une valeur arrondie du résultat à  $10^{-3}$  près.
  2. On suppose dans cette question que  $n = 500$ .

Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre d'appareils non conformes parmi les 500.

On considère l'évènement E « le nombre d'appareils non conformes est supérieur ou égal à 6 ».
- a. Pourquoi peut-on approcher la loi binomiale de la variable aléatoire  $Y$  par la loi de Poisson de paramètre 5?
  - b. En utilisant cette approximation calculer la probabilité de l'évènement E arrondie au centième.

#### Partie B

L'entreprise met en place un nouveau dispositif censé améliorer la fiabilité des appareils produits. Deux chaînes de fabrication sont mises en service : la chaîne n° 1, sans nouveau dispositif et la chaîne n° 2 avec le nouveau dispositif. Afin de tester l'hypothèse selon laquelle le nouveau dispositif améliore de manière significative la fiabilité des appareils produits, on a prélevé de manière aléatoire 200 appareils à la sortie de chacune des deux chaînes de fabrication.

Un pourcentage  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) d'appareils issus de la chaîne n° 1 (resp. n° 2) ont fonctionné parfaitement pendant les 3 premiers mois.

1.
  - a. Expliquer pourquoi on met en place un test unilatéral.
  - b. On prend pour hypothèse nulle  $H_0 : p_1 = p_2$ . Préciser l'hypothèse  $H_1$  alternative qui va être opposée à l'hypothèse  $H_0$ .

On note  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 200 provenant de la chaîne n° 1 (resp. n° 2) associe la fréquence  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) d'appareils ayant parfaitement fonctionné pendant 3 mois. Sur les deux échantillons prélevés, on a obtenu des valeurs observées qui sont :  $f_1 = 87\%$  et  $f_2 = 93\%$ .

On note  $D = F_2 - F_1$ .

Sous l'hypothèse nulle, les deux chaînes sont censées produire le même pourcentage  $p$  d'appareils conformes et la loi suivie par  $D$  (celle que l'on adopte)

est la loi normale :  $\mathcal{N}\left(0; \sqrt{\frac{p(1-p)}{200} + \frac{p(1-p)}{200}}\right)$ .

On prend  $p = 0,9$  car  $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$ .

2. Préciser les paramètres de la loi suivie par D.
3. Si  $\alpha$  est le seuil de risque, on désigne par  $h_\alpha$  le réel positif tel que :  
 $P(D \leq h_\alpha) = 1 - \alpha$ .
- a. On suppose dans cette question que  $\alpha = 0,01$ .  
 Déterminer la valeur arrondie au centième  $h_\alpha$ .  
 Énoncer la règle de décision du test. Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,01.
- b. On suppose dans cette question que  $\alpha = 0,05$ .  
 Déterminer  $h_\alpha$ .  
 Énoncer la règle de décision du test.  
 Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,05.

**Exercice 2****11 points**

Le benzène, à l'état de vapeur, dilué dans un gaz inerte, réagit avec le dichlore.

**Partie A**

La réaction de chloration du benzène, dans certaines conditions, conduit à la formation de monochlorobenzène et de dichlorobenzène. On peut admettre que la concentration en dichlore est constante pendant toute la durée de la réaction (car cette concentration en dichlore est très grande par rapport à la concentration en benzène).

À l'instant  $t$ , exprimé en minute, on désigne par  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  les concentrations molaires respectives du benzène, du monochlorobenzène et du dichlorobenzène en micromole par litre.

À l'instant  $t = 0$ , les concentrations molaires sont égales à :

- pour le benzène  $[C_6H_6] = 0,2$
- pour le monochlorobenzène  $[C_6H_5Cl] = 0$
- pour le dichlorobenzène  $(C_6H_4Cl_2) = 0$ .

On admet que les fonctions  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont solutions sur  $[0 ; +\infty[$  du système différentiel (S)

$$\begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t) & : (E_1) \\ y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t) & : (E_2) \\ z'(t) = k_2 y(t) & : (E_3) \end{cases} \quad \text{où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes de vitesse, } 0 < k_1 < k_2.$$

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E<sub>1</sub>).
- b. Déterminer la solution de (E<sub>1</sub>) vérifiant la condition initiale  $x(0) = 0,2$ .
2. a. Montrer que les solutions  $y$  du système (S) vérifient l'équation différentielle (E<sub>4</sub>) :

$$y'(t) + k_2 y(t) = 0,2k_1 e^{-k_1 t}, \text{ avec } t \in [0 ; +\infty[.$$

- b. Déterminer le réel A de sorte que  $t \mapsto Ae^{-k_1 t}$  soit solution de l'équation différentielle (E<sub>4</sub>).
- c. Résoudre l'équation différentielle (E<sub>4</sub>).
- d. Déterminer la solution de (E<sub>4</sub>) vérifiant la condition initiale  $y(0) = 0$ .
3. a. Vérifier que pour tout  $t$  supérieur ou égal à 0, on a :  $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$ .

- b.** En déduire la solution  $z$  du système (S) vérifiant les conditions initiales à l'instant  $t = 0$ .

**Partie B**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \text{ et } g(t) = \frac{0,2k_1}{k_2 - k_1} f(t).$$

1.
  - a.** Calculer la dérivée  $f'(t)$ .
  - b.** Montrer que l'équation  $f'(t) = 0$  admet une unique solution, qu'on notera  $t_m$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Exprimer  $t_m$  en fonction de  $k_1$  et  $k_2$ .
  - c.** Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
  - d.** En déduire que la fonction  $g$  admet un maximum en  $t_m$ .
2. Au cours d'une expérience on constate que le maximum de la fonction  $g$  est atteint à l'instant  $t = 30$ .  
Quelle relation peut-on déduire entre  $k_1$  et  $k_2$  ?

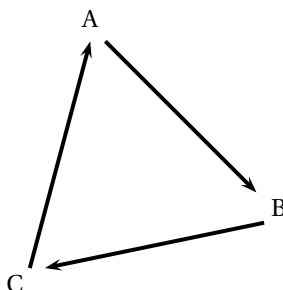
## Brevet de technicien supérieur Chimiste session 2006

A. P. M. E. P.

### Exercice 1

10 points

On considère trois réactions d'ordre 1 formant le cycle suivant :



On désigne par  $x$ ,  $y$  et  $z$  les concentrations en  $\text{mol.L}^{-1}$  à l'instant  $t$  des produits A, B et C ( $t$  exprimé en minutes).

Sachant qu'à chaque instant  $t$ , on a :  $x + y + z = 3$ , les lois cinétiques donnent, en remplaçant  $z$  par  $3 - x - y$ , les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y + 3 & (1) \\ \frac{dy}{dt} = -y + x & (2) \\ z = 3 - x - y & (3) \end{cases}$$

avec les conditions initiales  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = z(0) = 0$ .

Les deux premières équations permettent d'établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants ( $E_1$ ) vérifiée par  $x$  :

$$(E_1) \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 3x = 3.$$

On rappelle que  $\frac{d^2x}{dt^2}$  est la dérivée seconde de la fonction  $x$  et que  $\frac{dx}{dt}$  est la dérivée de la fonction  $x$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation du second degré d'inconnue  $r$  suivante :

$$(E_c) \quad r^2 + 3r + 3 = 0.$$

2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle du second ordre suivante

$$(E_0) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

3. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle du second ordre ( $E_1$ ).



4. En utilisant les résultats précédents, donner la solution générale de l'équation différentielle ( $E_1$ ).
5. En utilisant l'équation (1), calculer la valeur prise par la dérivée de la fonction  $x$  en zéro :  $x'(0)$ .
6. Montrer que la solution de l'équation différentielle ( $E_1$ ) qui vérifie les conditions initiales est la fonction  $x$  définie pour  $t \geq 0$  par

$$x(t) = 1 + 2e^{-1,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

7. Calculer la dérivée de la fonction  $x$ . En déduire l'expression de la fonction  $y$ .
8. Déterminer la fonction  $z$  en utilisant l'équation (3).
9. Calculer, en les justifiant, les limites de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2****10 points****Partie A**

On produit du styrène par déshydrogénation catalytique de l'éthylbenzène. Pour étudier le rendement de cette production, on réalise un plan d'expérience  $2^3$  complet, construit selon l'algorithme de Yates.

Les trois facteurs sont :

X1 : la nature du catalyseur ;

X2 : la température ;

X3 : le rapport molaire vapeur d'eau / éthylbenzène.

En fonction du domaine expérimental, on attribue les niveaux suivants à chacun des facteurs :

niveau	-1	+1
X <sub>1</sub> : catalyseur	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
X <sub>2</sub> : température	800 K	1000 K
X <sub>3</sub> : rapport molaire	4/1	9/1

On réalise huit expériences dont les résultats sont donnés par le tableau suivant :

expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
catalyseur	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
température	800 K	800 K	1 000 K	1 000 K	800 K	800 K	1 000 K	1 000 K
rapport molaire	4/1	4/1	4/1	4/1	9/1	9/1	9/1	9/1
rendement (%)	46	40	92	80	48	42	95	85

Le modèle retenu pour le rendement  $Y$  est un modèle polynomial de la forme

$$Y = a_0 + a_1 X_{11} + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_{12} X_1 X_2 + a_{13} X_1 X_3 + a_{23} X_1 X_3 + a_{123} X_1 X_2 X_3 + \epsilon.$$

**Les réponses concernant cette partie A seront données sur la feuille Annexe (recto-verso) qui sera jointe à la copie.**

1. Compléter la matrice complète des expériences et des effets, ci-jointe en annexe ; calculer une estimation ponctuelle de chacun des coefficients du modèle.
2. Si on considère qu'un effet dont l'estimation ponctuelle est inférieure à 1 % est non significatif, donner l'expression du modèle.
3. La représentation graphique de l'effet du facteur  $X_1$  est donnée par le graphique ci-joint en annexe. Justifier les valeurs de  $Y$  données sur le graphique en annexe.  
Quel est l'effet global du facteur  $X_1$  ?  
Quelle conclusion peut-on en tirer afin d'obtenir le meilleur rendement ?

### Partie B

On utilise le styrène dans la fabrication du polystyrène. À la fin de la chaîne de transformation un broyeur délivre le polystyrène en granulés. Afin de contrôler la granulométrie, on prélève un échantillon de 100 granulés et on mesure leur diamètre, en millimètre. La moyenne  $m$  et l'écart type  $s$  de cet échantillon sont tels que  $m = 4,63$  et  $s = 0,15$ .

1. Cet échantillon étant assimilé à un échantillon non exhaustif, déduire des résultats obtenus pour cet échantillon une estimation ponctuelle (à  $10^{-2}$  près) de la moyenne  $\mu$  et de l'écart type  $\sigma$  des diamètres des granulés délivrés par ce broyeur.  
*Dans la suite de l'exercice on considérera que la valeur de l'écart type  $\sigma$  est l'estimation ponctuelle obtenue.*
2. On suppose que la variable aléatoire  $\bar{X}$  qui, à tout échantillon non exhaustif de taille  $n = 100$ , associe la moyenne des diamètres des granulés de cet échantillon suit une loi normale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
3. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne des diamètres  $\mu$  avec un coefficient de confiance égal à 95 %.

**Annexe : Exercice 2 - Partie A**

Feuille des réponses (recto-verso) à joindre à la copie

1. Matrice des effets :

Expérience	Moyenne	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	Y observé
1									46
2									40
3									92
4									80
5									48
6									42
7									93
8									85
Estimation des effets	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{23}$	$a_{123}$	

Calcul des estimations ponctuelles des effets :

$a_0 =$

$a_1 =$

$a_3 =$

$a_{12} =$

$a_{13} =$

$a_{23} =$

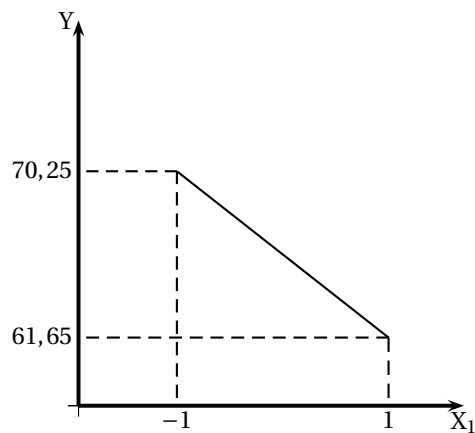
$a_{123} =$

2. Expression du modèle :

$Y =$

Feuille de réponses (suite)

3. Représentation graphique de l'effet de facteur X<sub>1</sub> :



# Brevet de technicien supérieur

## Chimiste session 2007

A. P. M. E. P.

### Exercice 1

8 points

Deux chaînes de production  $C_A$  et  $C_B$  d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent, en très grande quantité, le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On note  $X_A$  (respectivement  $X_B$ ) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne  $C_A$  (respectivement  $C_B$ ), associe sa masse en mg.

On sait que  $X_A$  (respectivement  $X_B$ ) suit la loi normale de paramètres  $(m_A ; \sigma_A)$  (respectivement  $(m_B ; \sigma_B)$ ).

Un comprimé est jugé conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.

- a. On donne  $m_A = 896$  mg et  $\sigma_A = 10$  mg. Calculer, à  $10^{-2}$  près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans  $C_A$  soit conforme.
- b. On donne  $m_B = 900$  mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par  $C_B$  soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart type  $\sigma_B$ .
2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne  $C_A$  et 60 % de la chaîne  $C_B$ . La chaîne  $C_A$  produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne  $C_B$  en produit 3 %.

On prélève au hasard un comprimé dans la production du laboratoire.

On note

A l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne  $C_A$  »,

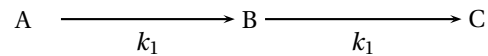
B l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne  $C_B$  »,

C l'évènement « Le comprimé est conforme ».

- a. À partir de l'énoncé, déterminer les probabilités des évènements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B que l'on notera respectivement  $P_A(C)$  et  $P_B(C)$ .
- b. Calculer alors la probabilité  $P(C)$  de l'évènement C.
- c. On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme.  
Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne  $C_A$ .
3. Le contrôleur qualité n'étant pas satisfait de la production de la chaîne  $C_A$ , il décide de la faire régler. Après ce réglage, on teste l'hypothèse nulle  $H_0 : m_A = 900$  mg, contre l'hypothèse alternative  $H_1 : m_A \neq 900$  mg, au seuil de risque 5 %. On désigne par  $\bar{X}_A$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon non exhaustif de taille 100, associe sa masse moyenne en mg. Sous  $H_0$ , on admet que  $\bar{X}_A$  suit la loi normale de paramètres  $(900 ; 1)$ .
- a. Déterminer le nombre réel positif  $h$  tel que :  $P(900 - h \leq \bar{X}_A \leq 900 + h) = 0,95$ .
- b. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
- c. Un tirage de 100 comprimés dans la production de la chaîne  $C_A$  est effectué. La masse moyenne obtenue est  $\bar{x} = 899$  mg. Appliquer le test.

**Exercice 2****12 points****Étude de la cinétique de deux réactions successives du 1<sup>er</sup> ordre**

On considère les réactions successives suivantes :



où  $k_1$ , et  $k_2$  désignent des nombres réels strictement positifs.

On désigne par  $a - x$ ,  $y$  et  $z$  les concentrations en mol.L<sup>-1</sup> à l'instant  $t$  des produits A, B et C ( $t$  est exprimé en minutes),  $a$  désignant la concentration à l'instant  $t = 0$  du produit A, seul présent au début de la réaction.

$x$ ,  $y$  et  $z$  sont des fonctions de  $t$  définies sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

D'après la conservation de la matière on a :  $x = y + z$ . Les lois cinétiques donnent :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a - x) & (1) \\ \frac{dy}{dt} = k_1(a - x) - k_2y & (2) \\ z = x - y & (3) \end{cases}$$

**Partie A :**

1. L'équation (1) s'écrit aussi :  $x' + k_1x = k_1a$  ( $E_1$ ) avec  $k_1$  nombre réel positif non nul.
  - a. Résoudre l'équation homogène ( $E_0$ ) :  $x' + k_1x = 0$ .
  - b. Déterminer une solution particulière  $x_p(t)$  de ( $E_1$ ) sous la forme d'une fonction constante.
  - c. En déduire la solution générale de ( $E_1$ ).
  - d. Sachant que la solution  $x$  de ( $E_1$ ) cherchée vérifie  $x(0) = 0$ , montrer que :

$$x(t) = a(1 - e^{-k_1t})$$

2. On suppose, dans cette question, que  $k_1$  et  $k_2$  sont des nombres réels positifs distincts.
  - a. Montrer que l'équation (2) équivaut à ( $E_2$ ) :

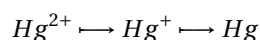
$$y' + k_2y = k_1ae^{-k_1t}$$

- b. Résoudre l'équation homogène ( $E'_0$ ) :  $y' + k_2y = 0$ .
- c. Déterminer une solution particulière  $y_p(t)$  de ( $E_2$ ) sous la forme  $y_p(t) = \lambda e^{-k_1t}$  où  $\lambda$  est une constante réelle à déterminer.
- d. En déduire la solution générale de ( $E_2$ ).
- e. Sachant que  $y(0) = 0$ , montrer que :  $y(t) = \frac{ak_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1t} - e^{-k_2t})$ .

3. Donner l'expression de  $z(t)$ .

**Partie B : Étude d'un exemple**

Cas de la réduction d'un sel mercurique :



(en présence de  $H_2$  sous pression constante), avec  $a = 10^{-3}$  mol.L<sup>-1</sup>,  $k_1 = 0,0283$  min<sup>-1</sup> et  $k_2 = 0,0033$  min<sup>-1</sup>.

1. Vérifier que :  $z(t) = 10^{-3} (1 + 0,132e^{-0,0283t} - 1,132e^{-0,0033t})$ .
2. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$ .
3. Déterminer la dérivée de la fonction  $z$ .
4. Montrer que, pour tout nombre réel  $t$  strictement positif :  $e^{-0,0283t} < e^{-0,0033t}$ .
5. En déduire le signe de  $z'(t)$  et le sens de variation de  $z$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

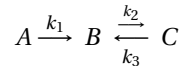
# Brevet de technicien supérieur Chimiste session 2008

A. P. M. E. P.

## Exercice 1

12 points

On considère les réactions suivantes :



où  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  désignent des constantes réelles strictement positives. À l'instant  $t$ , on désigne par  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  les concentrations respectives en  $\text{mol.L}^{-1}$  des produits A, B et C. Les lois de la cinétique chimique permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x \\ \frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y + k_3 z \\ \frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z \end{cases}$$

On suppose que, pour cette réaction :

$$k_1 = 1 ; k_2 = 1 ; k_3 = 0,5 ; x(0) = 1 ; y(0) = 0 ; z(0) = 0.$$

On obtient ainsi le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = -x & (1) \\ y' = x - y + 0,5z & (2) \\ z' = y - 0,5z & (3) \end{cases}$$

avec les conditions initiales  $x(0) = 1 ; y(0) = 0 ; z(0) = 0$ .

### Partie A

- Résoudre l'équation (1). En déduire  $x(t)$  en tenant compte de la condition initiale.
- En utilisant l'équation (3), exprimer  $y$  en fonction de  $z$  et  $z'$  puis en déduire l'expression de  $y'$  en fonction de  $z''$  et  $z'$ .
  - En reportant dans l'équation (2) les résultats obtenus aux questions 1. et 2. a., en déduire que  $z$  est solution de l'équation différentielle (E) :  $z'' + 1,5z' = e^{-t}$ .
- Déterminer le réel  $\alpha$  de sorte que la fonction  $\varphi : t \mapsto \alpha e^{-t}$  soit une solution de l'équation (E).
  - Résoudre l'équation différentielle (H) :  $z'' + 1,5z' = 0$ . En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions  $z$  définies par :

$$z(t) = \lambda e^{-1,5t} + \mu - 2e^{-t}.$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes réelles.

- En utilisant l'équation (3), en déduire l'expression de  $y(t)$ .
- Sachant que  $y(0) = 0$  et  $z(0) = 0$ , déterminer les constantes  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Partie B**

On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(t) = e^{-t} \\ g(t) = e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-1,5t} + \frac{1}{3} \\ h(t) = -2e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-1,5t} + \frac{2}{3} \end{cases}$$

1.
  - a. Déterminer, en justifiant, la limite en  $+\infty$  de la fonction  $g$ .
  - b. Montrer que, pour tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $g'$  peut s'écrire  $g'(t) = e^{-t}(-1 + 2e^{-0,5t})$ .
  - c. En déduire que la fonction  $g$  admet un maximum en un réel  $t_0$  (on donnera la valeur exacte de  $t_0$ ). Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près du maximum de  $g$  (la valeur exacte n'est pas demandée).
2. Les trois courbes données sur le graphique en annexe sont les représentations graphiques des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .
  - a. Indiquer sur ce graphique laquelle des trois courbes est la courbe  $\mathcal{C}_g$ , laquelle est  $\mathcal{C}_f$ , laquelle est  $\mathcal{C}_h$ , en justifiant la réponse.
  - b. On admet que  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  sont les concentrations respectives des produits A, B, C à l'instant  $t$ .  
Déterminer à l'aide du graphique une approximation de l'instant  $t_1$ , à partir duquel la concentration de A devient inférieure à celle de B et une approximation de l'instant  $t_2$  à partir duquel la concentration de C devient supérieure à celle de B. Placer  $t_1$  et  $t_2$  sur le graphique.

**Exercice 2****8 points**

Une entreprise conditionne et commercialise un désherbant liquide à base de glyphosate en bidons de 540 millilitres.

**Partie A**

La machine qui remplit les bidons peut être réglée au moyen d'un dispositif gradué en millilitres. Lorsque celui-ci est réglé sur la valeur  $m$ , le volume moyen de désherbant par bidon est  $m$ . On suppose que la variable aléatoire  $X$  qui, à tout bidon choisi au hasard dans la production, associe le volume en millilitres de désherbant qu'il contient, suit une loi normale de moyenne  $m$  et d'écart type 5.

1. On règle le dispositif sur la valeur  $m = 540$ . Calculer la probabilité de l'évènement «  $535 \leq X \leq 545$  ». On arrondira le résultat à  $10^{-3}$  près.
2. Sur quelle valeur  $m$  faut-il régler le dispositif pour que la probabilité de l'évènement «  $X \leq 550$  » soit égale à 0,95 ? (La réponse sera arrondie à l'unité.)
3. Un bidon est commercialisable s'il contient au moins 530 millilitres de désherbant.

On suppose, dans cette question, que le réglage est tel que 2 % des bidons ne sont pas commercialisables. On prélève au hasard 100 bidons dans la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi obtenu, associe le nombre de bidons de l'échantillon non commercialisables,

- a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire  $Y$  ? Quels en sont les paramètres ? Justifier. Calculer l'espérance mathématique de  $Y$ .



- b. On admet qu'on peut approcher la loi précédente par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
- c. Déterminer une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de la probabilité de l'évènement « L'échantillon contient au plus 3 bidons non commercialisables ».

### Partie B

Une grande surface de jardinerie qui reçoit un lot important de bidons de ce désherbant décide de contrôler la teneur en glyphosate du désherbant dont la valeur annoncée par le fabricant est de 170 g/L.

On désigne par  $\mu$  la moyenne en g/L de la teneur en glyphosate des bidons du lot reçu par la grande surface.

On prélève au hasard un échantillon de 50 bidons dans le lot reçu afin de l'adresser à un laboratoire. Le lot est supposé assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note  $\bar{G}$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 bidons prélevés au hasard dans le lot, associe la teneur moyenne en glyphosate en g/L de ces bidons.

On admet que la variable aléatoire  $\bar{G}$  suit une loi normale de moyenne inconnue  $\mu$  et d'écart type 0,9.

La grande surface construit un test d'hypothèse :

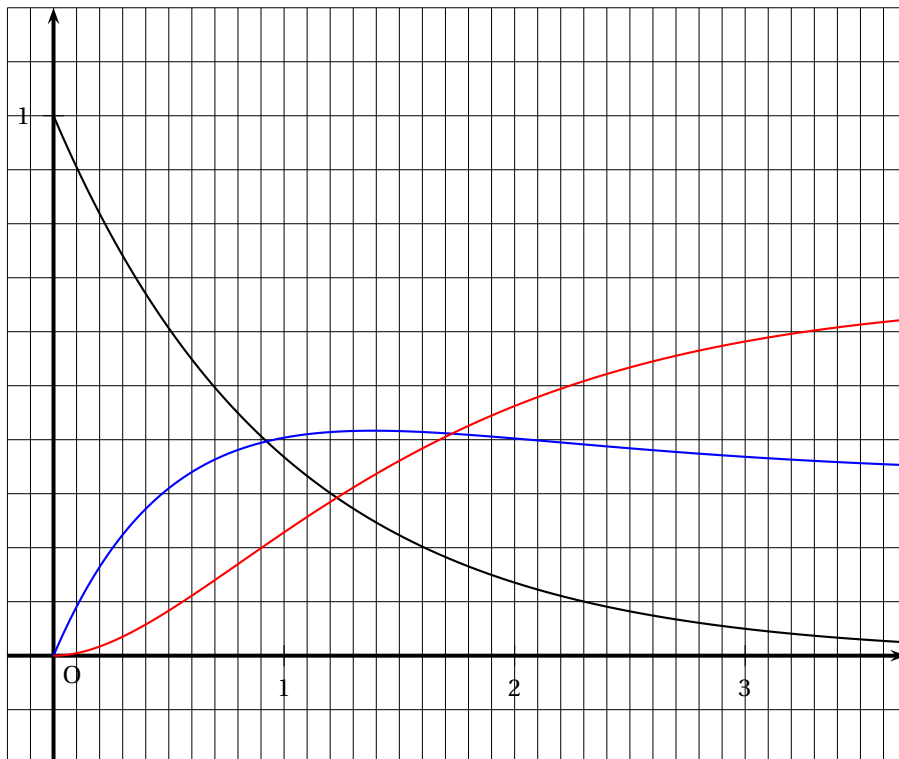
l'hypothèse nulle est  $H_0 : \mu = 170$

l'hypothèse alternative est  $H_1 : \mu \neq 170$

le seuil de signification est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle, déterminer le réel  $h$  tel que  $P(170 - h \leq \bar{G} \leq 170 + h) = 0,95$ .
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Le résultat obtenu par le laboratoire pour la teneur moyenne en glyphosate des bidons de l'échantillon qui a été prélevé est  $\bar{x} = 171,4$  g/L.  
Au vu de ce résultat, la grande surface estime que le produit est conforme à ce qu'annonce le fabricant. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Annexe



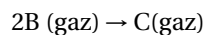
# Brevet de technicien supérieur Chimiste session 2009

A. P. M. E. P.

## Exercice 1

10 points

On étudie la réaction de dimérisation du buta -1,3 - diène en phase gazeuse, symbolisée par :



On étudie la cinétique de cette réaction.

- À l'instant  $t = 0$ , la concentration du buta -1,3 - diène est notée  $a$ ,

$$[B]_{\text{init}} = a \text{ où } a \text{ est strictement positif.}$$

- De même à l'instant  $t$ , la concentration du buta -1,3 - diène est notée  $x(t)$ .

$$[B] = x(t) \text{ où } x \text{ est une fonction telle que : } 0 < x(t) \leq a.$$

On admet que la vitesse  $v$  de la réaction obéit à la loi cinétique :

$$(1) \quad v = k[B]^2$$

où  $k$  est une constante strictement positive liée à la réaction, et on rappelle que la vitesse  $v$  de la réaction est définie par :

$$(2) \quad v(t) = -\frac{dx}{dt} = -x'(t) \text{ où } x' \text{ est la fonction dérivée de la fonction } x.$$

Le temps  $t$  s'exprime en minutes.

### Partie A : étude théorique

- Justifier que la fonction  $x$  vérifie l'équation différentielle. notée (E),  $-\frac{x'}{x^2} = k$  en utilisant les relations (1) et (2).
- Démontrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale  $x(0) = a$  est telle que :

$$x(t) = \frac{a}{akt + 1}.$$

- Exprimer le temps de demi-réaction, noté  $t_{0,5}$  au bout duquel la moitié du buta -1,3 - diène initial a été consommée, en fonction de  $k$  et  $a$ .
- Exprimer le temps de trois-quarts de réaction, noté  $t_{0,75}$  au bout duquel les trois-quarts du buta -1,3 - diène initial ont été consommés, en fonction de  $k$  et  $a$ .
- Vérifier que  $\frac{t_{0,75}}{t_{0,5}} = 3$ .
- Après quel instant, exprimé en fonction de  $k$  et  $a$ , restera-t-il moins de 10 % du buta -1,3 - diène initial ?

### Partie B : exploitation de résultats expérimentaux

On donne  $a = 2,000 \text{ mol.L}^{-1}$ .

On obtient expérimentalement les résultats suivants :

$t$ en minutes	0	5	10	15	20	25	30
$x(t)$ (en $\text{mol.L}^{-1}$ )	2,000	1,301	0,999	0,803	0,665	0,571	0,498

- Lire dans le tableau ci-dessus les valeurs approchées des temps de demi-réaction et trois-quarts de réaction, puis vérifier que ces valeurs approchées sont dans un rapport 3 comme établi dans la partie A question 5.
- Reproduire sur la copie et compléter le tableau ci-dessous (on arrondira à  $10^{-3}$ ) :

$t$ en minutes	0	5	10	15	20	25	30
$z(t) = \frac{1}{x(t)}$							

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $t$  et  $z$  arrondi à  $10^{-4}$ .
  - Un ajustement linéaire est-il justifié ?
- Déterminer une équation de la droite des moindres carrés sous la forme  $z = mt + p$  ( $m$  et  $p$  seront donnés avec une précision de  $10^{-2}$ ). En déduire une expression approchée de  $x(t)$  en fonction de  $t$ .
- En utilisant le résultat de la modélisation de la deuxième question de la partie A. déterminer une valeur approchée de la constante  $k$  de la réaction .

## Exercice 2

10 points

Une entreprise fabrique en grande série des fioles jaugées de laboratoire de contenance théorique 500 mL. Ces fioles jaugées sont donc calibrées sur 500 mL (dans toute la suite du problème on désignera par fiole une fiole jaugée), On s'intéresse à la qualité de la calibration à l'aide d'un contrôle gravimétrique.

**Les résultats des calculs seront arrondis au millième sauf indication contraire.**

### Partie A

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque fiole, associe le résultat du contrôle gravimétrique en mL. On considère que  $X$  suit une loi normale de moyenne 500 et d'écart type  $\sigma = 0,1$ .

- Calculer la probabilité d'obtenir le résultat du contrôle dans l'intervalle  $[499,8 ; 500,2]$ .
- Déterminer à  $10^{-3}$  près le nombre positif  $h$  tel que 80 % des résultats appartiennent à l'intervalle  $[500 - h ; 500 + h]$ .

### Partie B

On refuse toutes les fioles pour lesquelles le volume obtenu lors du contrôle gravimétrique est supérieur à 500,2 mL ou inférieur à 499,8 mL et elles sont alors considérées comme défectueuses, On suppose maintenant que la probabilité qu'une fiole soit défectueuse est égale à 0,05.

Dans un lot d'un très grand nombre de fioles, on effectue un contrôle sur 50 fioles choisies au hasard. On appelle alors  $Y$  la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 fioles, associe le nombre de fioles défectueuses.

On assimile les prélèvements de 50 fioles à des tirages de 50 fioles avec remise.

- Justifier que  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,05.

2.
  - a. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il n'y ait aucune fiole défectueuse dans le lot.
  - b. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait au moins trois fioles défectueuses dans le lot.

### Partie C

À l'occasion d'une commande, un laboratoire reçoit des fioles de l'entreprise, laquelle lui assure que les fioles jaugées ont bien une contenance de 500 mL. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la commande reçue, avec la valeur  $\mu = 500$  annoncée par l'entreprise. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectuera un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 100 fioles prises dans le lot reçu.

Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui, à un tel prélèvement, associe le volume moyen des 100 fioles.

#### 1. Construction du test

À l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu = 500$ , on oppose l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu \neq 500$ .

Sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , on admet que  $\bar{X}$  suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type  $\frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 0,01$ .

- a. En se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ , déterminer la valeur arrondie à  $10^{-2}$  près du réel  $h$  tel que la probabilité  $P(\mu - h \leq \bar{X} \leq \mu + h)$  soit égale à 0,95.
- b. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse  $H_0$  au seuil de risque de 5 %.
- c. Énoncer la règle de décision du test.

#### 2. Utilisation du test

Le laboratoire, après avoir prélevé 100 fioles, constate un volume moyen de 499,96 mL.

Appliquer le test à l'échantillon puis conclure.

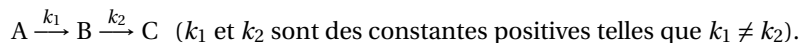
# Brevet de technicien supérieur Chimiste session 2010

A. P. M. E. P.

## Exercice 1

9 points

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C, le schéma est le suivant :



On nomme  $x$ ,  $y$  et  $z$  les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant  $t$  (en minutes),  $t \geq 0$ .

Les conditions initiales sont les suivantes :  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  et  $z(0) = 0$ .

### Partie A

#### Détermination des concentrations

1. L'étude cinétique permet d'abord d'écrire l'équation différentielle

$$(1) : \frac{dx}{dt} = -k_1 x$$

- a. Résoudre l'équation (1).
  - b. Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale  $x(0) = 1$ .
2. L'étude cinétique permet ensuite d'écrire l'équation (2) :  $\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 e^{-k_1 t}$ .
    - a. Trouver un réel  $\alpha$  tel que la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \alpha e^{-k_1 t}$  soit une solution particulière de l'équation (2).
    - b. Résoudre l'équation (2).
    - c. Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale  $y(0) = 0$ .
  3. D'après le principe de conservation de la matière, on a, pour tout nombre réel  $t$  positif :

$$x(t) + y(t) + z(t) = x(0) + y(0) + z(0).$$

Exprimer alors  $z(t)$  en fonction de  $t$ .

### Partie B

#### Étude des variations des concentrations dans le cas où $k_1 = 0,5$ et $k_2 = 1$ (en $\text{min}^{-1}$ )

On a dans ce cas :  $x(t) = e^{-0,5t}$ ,  $y(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$  et  $z(t) = 1 - 2e^{-0,5t} + e^{-t}$

1. Quel est le sens de variation de la fonction  $x$  ?
2. Après avoir montré que la dérivée  $y'$  de  $y$  est définie par

$$y'(t) = e^{-0,5t} (-0,5 + e^{-0,5t}),$$

montrer que, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , la fonction  $y$  admet un maximum  $M$  que l'on déterminera ainsi que l'instant  $t_M$  tel que  $y(t_M) = M$ .

3. Étudier les variations de la fonction  $z$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On précisera la limite de  $z$  en  $+\infty$ .

**Exercice 2****11 points****les parties A, B et C sont indépendantes****Partie A**

Un technicien étudie le courant d'électrolyse traversant une cellule contenant une solution d'un électrolyte donné. Il souhaite optimiser ce courant en faisant varier trois facteurs : la dilution de la solution, comprise entre 10 % et 90 %, la température de la solution, comprise entre 50 °C et 80 °C, et la surface de l'électrode comprise entre 5 et 10 cm<sup>2</sup>.

Il va réaliser un plan d'expérience 2<sup>3</sup>, sans tenir compte des interactions, construit selon l'algorithme de Yates.

Le courant traversant le circuit est ensuite mesuré et est exprimé par le rapport de ce courant à un courant servant de référence, ce qui permet de l'exprimer en pourcentage. Cette valeur  $Y$  est modélisée par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \varepsilon$$

où l'on ne tient pas compte des interactions.

$\varepsilon$  est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle.

$X_1$  représente la dilution,  $X_2$  la température et  $X_3$  la surface de l'électrode.

On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

Niveau	-1	+1
Dilution	10 %	90 %
Température	50 °C	80 °C
Surface	5 cm <sup>2</sup>	10 cm <sup>2</sup>

Les résultats des huit expériences sont les suivants :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
Dilution	10 %	90 %	10 %	90 %	10 %	90 %	10 %	90 %
Température	50 °C	50 °C	80 °C	80 °C	50 °C	50 °C	80 °C	80 °C
Surface	5 cm <sup>2</sup>	5 cm <sup>2</sup>	5 cm <sup>2</sup>	5 cm <sup>2</sup>	10 cm <sup>2</sup>	10 cm <sup>2</sup>	10 cm <sup>2</sup>	10 cm <sup>2</sup>
Courant	15 %	9 %	61 %	49 %	17 %	11 %	64 %	54 %

1. Compléter la matrice des effets sans interactions sur le tableau figurant dans l'annexe qui sera rendue avec la copie.
2. Calculer une estimation ponctuelle des coefficients  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  et donner l'expression du modèle.
3. Représenter graphiquement l'effet des facteurs  $X_1$  et  $X_2$ .
4. Que conseilleriez-vous au technicien afin d'obtenir un courant maximum ?

**Partie B**

Dans les conditions de l'expérience réalisée par le technicien, on peut considérer que la variable aléatoire  $X$  qui, à chaque électrode tirée au hasard, associe sa durée de vie exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 2.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une électrode prise au hasard ait une durée de vie d'au moins 30 heures ?
2. Quelle est, à  $10^{-3}$  près, la probabilité pour qu'une électrode prise au hasard ait une durée de vie comprise entre 28 et 32 heures ?
3. Sachant que la durée de vie d'une électrode est supérieure à 30 heures, quelle est, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'elle soit supérieure à 35 heures ?

### Partie C

Dans cette question les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

Une entreprise fabrique, en très grand nombre, des électrodes dont la surface, mesurée en  $\text{cm}^2$ , a pour moyenne inconnue  $\mu$  et pour écart-type 0,18.

1. Le technicien a reçu 10 électrodes de cette production. Il a mesuré les surfaces, en  $\text{cm}^2$ , des électrodes de cet échantillon extrait de la production de l'entreprise et il a obtenu les résultats suivants :

4,8 ; 5,3 ; 5,1 ; 5,0 ; 4,9 ; 5,0 ; 5,2 ; 4,8 ; 5,0 ; 5,2.

- a. Calculer la moyenne des surfaces et, à  $10^{-2}$  près, l'écart-type sur cet échantillon.
  - b. Donner une estimation ponctuelle de  $\mu$ .
2. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon non exhaustif de 10 électrodes, associe la moyenne de la surface de ces 10 électrodes en  $\text{cm}^2$ .  
On admet que  $X$  suit la loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\frac{0,18}{\sqrt{10}}$ .
    - a. Donner un intervalle de confiance de  $\mu$  avec un coefficient de confiance de 95%.
    - b. Peut-on affirmer que la moyenne  $\mu$  appartient à cet intervalle ? Expliquer la réponse.



**ANNEXE (à rendre avec la copie)**

Expériences	Moyenne	$X_1$	$X_2$	$X_3$	Passage du courant
1					15%
2					9%
3					61%
4					49%
5					17%
6					11%
7					64%
8					54%

A. P. M. E. P.

**Brevet de technicien supérieur  
Chimiste session 2011**

**Exercice 1**

**11 points**

On considère deux réactions chimiques opposées, toutes deux d'ordre 1.

$A \longrightarrow B$  est une réaction réversible, de constante de vitesse  $k_1$ , et  $B \longrightarrow A$  est la réaction opposée, de constante de vitesse  $k_2$ . On désigne par  $x(t)$  et  $y(t)$  les concentrations respectives (exprimées en moles par litre) des produits A et B à l'instant  $t$  (positif et exprimé en secondes) et l'on admettra que les fonctions  $x$  et  $y$  sont définies et deux fois dérivables sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Seul le produit A étant présent à l'instant initial, on pose  $x(0) = x_0$ , avec  $x_0 > 0$  et l'on a donc  $y(0) = 0$ .

Les lois de la cinétique chimique permettent d'obtenir le système différentiel (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t) + k_2 y(t) & (1) \\ y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t) & (2) \end{cases} \quad \text{avec } t \geq 0, \quad k_1 > 0 \text{ et } k_2 > 0.$$

**Partie A : résolution du système différentiel**

- Calculer  $x'(t) + y'(t)$  puis justifier que la fonction  $x + y$  est une fonction constante ; déterminer cette constante puis en déduire l'expression de  $y(t)$  en fonction de  $x(t)$ .
- À l'aide de l'équation (1) prouver que :  $x'(t) + (k_1 + k_2)x(t) = k_2 x_0$ .
- On considère les équations différentielles :  
 $(E) : u' + (k_1 + k_2)u = k_2 x_0$  et  $(E_0) : u' + (k_1 + k_2)u = 0$ ,  
dans lesquelles  $u$  désigne une fonction définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

- a. Résoudre l'équation  $(E_0)$ .
  - b. Déterminer une fonction constante solution de l'équation  $(E)$ .
  - c. Résoudre alors l'équation  $(E)$ .
4. En déduire, en utilisant la condition initiale et les questions précédentes, que l'on a :

$$x(t) = x_0 \left( \frac{k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t} \right) \text{ et } y(t) = x_0 \left( \frac{k_1}{k_1 + k_2} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t} \right)$$

**Partie B : application**

Dans cette partie on suppose  $x_0 = 1$ ,  $k_1 = \frac{1}{30}$  et  $k_2 = \frac{1}{60}$  ; les courbes représentatives des fonctions  $x$  et  $y$  sont données en **Annexe**.

1. Déterminer le sens de variation des fonctions  $x$  et  $y$ .
2. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .
3. Déterminer l'instant  $t_1$  auquel les concentrations des produits A et B sont égales et en donner une valeur approchée à 0,01 près.

**Exercice 2****9 points**

Le béton est un matériau composite qui, après hydratation, acquiert progressivement sa résistance. La réaction chimique (appelée "*prise*") qui procure cette résistance étant assez lente, les tests de résistance d'un béton sont effectués bien avant l'obtention de la résistance maximale et généralement quatre semaines après le début de la réaction. Cette résistance se mesure en *MPa* (méga Pascal).

1. A quatre semaines, cette résistance est soumise au sein d'un même ouvrage à des fluctuations : quantité d'eau apportée lors de l'hydratation, conditions climatiques, dispersion de fabrication, etc. Dans cette question on note  $R$  la variable aléatoire qui à chaque parcelle de béton de l'ouvrage choisie au hasard associe la résistance du béton mesurée en *MPa*. On suppose que  $R$  suit la loi normale de moyenne 81,5 et d'écart-type 4,5. On donnera les résultats à 0,01 près.
  - a. Calculer la probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance inférieure ou égale à 90 *MPa*.
  - b. Calculer la probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance supérieure ou égale à 76 *MPa*.
  - c. Calculer  $P(77 \leq R \leq 86)$ . Interpréter ce résultat.
2. Les normes de résistance sont établies par coulage de béton à l'intérieur d'éprouvettes de test pouvant être, selon les pays, de forme cubique ou cylindrique. On constate que la résistance  $y$  d'un même béton, mesurée sur une éprouvette cubique est plus élevée que sa résistance  $x$  mesurée sur une éprouvette cylindrique. Par exemple la norme 30/37 fait référence à une résistance de 30 *MPa* sur cylindrique et de 37 *MPa* sur cubique. Le tableau suivant donne en correspondance les résistances mesurées pour divers types de béton :

Valeurs de $x$ (éprouvette cylindrique)	20	30	40	50	60	70	80
Valeurs de $y$ (éprouvette cubique)	25	37	50	60	75	85	95

- a. Donner à 0,001 près le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double  $(x, y)$  et expliquer pourquoi un ajustement affine semble justifié dans ce cas.
  - b. Déterminer une équation de la forme  $y = ax + b$  de la droite de régression  $D$  de  $y$  par rapport à  $x$ ; on donnera les valeurs de  $a$  et  $b$  à 0,01 près.
  - c. On conçoit un béton ayant une résistance de 120 *MPa* sur éprouvette cubique; quelle est la norme que l'on peut prévoir indiquée pour celui-ci?
3. Une société commercialise des lots de blocs de béton dont elle affirme que la résistance moyenne  $m$  est strictement supérieure à 60 *MPa*. Afin de mettre à l'épreuve cette affirmation, on décide d'utiliser un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1%. On admet que la variable aléatoire  $X$  qui à tout bloc choisi au hasard dans un lot associe sa résistance suit une loi normale de moyenne  $m$  inconnue et d'écart-type  $\sigma = 3$ . On désigne par  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire et non exhaustif de taille 36 de blocs associe la moyenne des résistances des blocs de cet échantillon.
  - a. L'hypothèse nulle est  $H_0 : m = 60$ . Quelle est l'hypothèse alternative  $H_1$  ?
  - b. On se place sous l'hypothèse  $H_0$ . Quelle est la loi suivie par  $\bar{X}$  ?
  - c. Sous l'hypothèse  $H_0$ , déterminer un réel  $u$  approché à 0,01 près tel que  $P(\bar{X} \leq 60 + u) = 0,99$ .

- d.** Énoncer la règle de décision du test.
- e.** Le tableau ci-dessous donne la répartition des résistances d'un échantillon aléatoire et non exhaustif de 36 blocs :

Résistance mesurée	57	58	59	60	62	64	65
Effectif	1	2	4	9	10	6	4

Appliquer le test et conclure.

**Annexe**

