Lectures sur les nombres imaginaires

Extrait de "La folie de Jérôme Cardan". (p. 14, 15, 16, 17)

"Alors sa tête ploie, misérable, le menton affaissé, les deux mains recourbées tristounettes à hauteur des joues, l'œil mort... c'est une explosion de rires... Mais Jérôme bondit sur ses pieds, relève Ludovico d'une esquisse de coup de pied dans les reins, et entraîne son monde vers la salle capitulaire. Pietro les suit. Avant de pénétrer sous l'arcade, il jette un regard sur le monde du dehors, le ciel est clair, bleuté. Comme un reflet des neiges lointaines sur les Alpes ou des eaux du Pô inondant la plaine ? Nous sommes le 16 mars 1539.

(...)

Il (Pietro) va pour s'élancer de l'autre côté de la salle, et c'est alors que le silence se fait, le bruit des paroles reflue peu à peu, hésite, s'apaise, consent à faire place : au centre de la salle on a installé cinq tables. En cercle. Cinq personnages prennent place. Les gens s'ordonnent maintenant autour de ce centre ; cela fait dans la foule des frémissements de vaguelettes, des ondulations lentes, une géométrie se dessine, cercles et rayons, quelles symétries saisirais-tu ici Léonard ? Sans doute d'abord ce centre de cinq personnages, rupture d'avec le reste du monde, convergence des regards et des pensées, ligne de fuite interdite, centre unique et divers, pour Pietro désormais la seule réalité visible. Jérôme Cardan est là, le bonnet écarlate rejeté en arrière, déjà tout le corps tendu et le vêtement dans sa bigarrure comme un défi crié à tous. Pietro le regarde, fasciné.

Il devine en face de Jérôme, la silhouette de Nicolo Tartaglia, tassée sous sa large coiffe aplatie et informe. Il sait que les autres sont Anton Maria Fior, dont la provocation lancée à Tartaglia a nécessité la tenue de ce tournoi, Annibale Dela Nave et Zuane Da Coi, Zuane qui, il y a quelques mois, a ravi à Cardan la chaire de mathématiques à l'Académie Palatine de Milan, dans un concours plutôt obscur et marécageux ! ... Il a rêvé un cours instant, et voici que déjà ces hommes s'affrontent, une nouvelle fois pour la plupart d'entre eux, champ clos de l'algèbre où ils se mesurent à coup d'équations. C'est pour eux le troisième ? le quatrième tournoi ? Mais pour Pietro c'est le premier, et il est bien décidé à n'en perdre aucun nombre, aucun calcul, Ars Rei et Census, "l'art de la chose cherchée et inconnue" :

"Soit le carré et cinq fois le côté égal à trente..."

Il faut du talent à suivre les cinq joueurs : les défis partent à toute volée, d'une table à l'autre ; Zuane provoque le Bègue et Jérôme se mêle de la partie. Quelques instants de silence, les seigneurs et les dames immobilisent avec grâce le pli de leurs lèvres ou la palpitation de leur téton, des yeux brillent, quelques moines et lettrés écrivent debout en grande hâte, puis l'un des cinq hoche la tête, ou crie parfois ; le juge du tournoi, on ne l'avait pas encore vu celui-là, point piqué au bord du cercle sur une chaise basse, fait une croix sur un rouleau. Et la course repart ...

L'équation est jetée, premièrement ramener d'un côté ; secondement, le cube, puis le census, tiercement diviser, extraire... Aujourd'hui, il n'est plus question d'équations du premier ou du second degré. Diophante, Al-Karagi, le Fibonacci, sont abandonnés au bord du chemin. Ce qui siffle chaque fois dans la provocation de l'un ou de l'autre, c'est "la chose au cube". La cubique ! Pietro en a la bouche sèche. La cubique, c'est le mur pour eux tous, maîtres et élèves, c'est le bout du chemin, l'impasse.

(...)

Il se raconte que Tartaglia possède une règle, et depuis quelques jours à peine. Le vieux maître l'a entendu dire, un ami professeur à l'université, un cousin de Tartaglia aurait parlé... Mais Tartaglia peut-il avoir un cousin ? Il vit seul, il écrit dans son dialecte de la vallée du Pô et c'est parfois d'une obscurité à renoncer ; il est secret, on le dit chafouin, retors... Bah est-ce qu'il va la balbutier, cette règle, ou la cracher d'un coup, le bègue à la gorge couturée? Rien ne se dessine. Chaque défi de Tartaglia, chaque cubique lancée avec une rage croissante, se heurte aux réponses des autres. Zuan est pâle comme la mort. Anton Fior disparaît peu à peu, écrasé par la rapidité des échanges. Cardan fait fureur. Il rit de toutes ses dents, tourne son bonnet écarlate sur la pointe de son crâne comme s'il touillait le chaudron du démon ; sa virtuosité est sans égale ; elle est réputée dans toute l'Europe savante, Pietro veut le croire ! Parfois son rire s'efface, il clôt à demi les yeux et les tourne en lui-même, on voit ses lèvres bouger petitement, il paraît s'en aller dans un songe ; puis son regard jaillit à nouveau, devient fixe, rigide, on dirait un bras tendu prolongé d'un pinceau ou d'un crayon qui scrute, pouce par pouce, les mimiques de Tartaglia, ses lèvres lourdes, ses yeux enfoncés profonds, ses rides, comme s'il déchiffrait une signature imprimée par le temps sur la face de l'autre, et qui raconte de cet autre le présent, la destinée, le secret."

Bonnet Jacques, *La folie de Jérôme Cardan*, Les presses du Languedoc, 1991.

Descartes et les racines imaginaires

« Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires[1], c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation[2], mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine ; comme encore qu'on puisse en imaginer trois en celle-ci :

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 \propto 0$$ [3]

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires[4]. »

[1] Descartes qualifie respectivement de « vraies », fausses » et « imaginaires » les racines positives, négatives et non réelles.

[2] Descartes a affirmé qu'une équation de degré n possède n racines.

[3] $\propto$ est le signe égal de Descartes.

[4] Autrement dit, si z est un nombre non réel, et si a est réel, z + a, z – a, et z × a ne sont pas réels.

Le sentiment de Leibniz (début du 18°)

« La nature, mère des éternelles vérités, ou plutôt l'Esprit divin, est en effet trop jaloux de sa merveilleuse diversité pour permettre que toutes choses soient condensées en un seul genre. C'est pourquoi il a trouvé un détour subtil et remarquable dans ce prodige de l'analyse, ce monstre du monde des idées, cette sorte d'amphibie entre l'être et le non-être que nous appelons racine imaginaire. »

Euler (1770)

« Toutes les expressions comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc, … sont par conséquent des nombres impossibles, ou imaginaires, puisqu'ils représentent les racines carrées de quantités négatives ; de ces nombres, nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui les rend nécessairement imaginaires ou impossibles. »

Gauss (1831)

Depuis Bombelli, les mathématiciens se sont accoutumés à calculer avec les « imaginaires », et depuis Gauss, on appelle « nombre complexe » un nombre de la forme a + ib, où a et b sont des nombres réels, et $i^2 = -1$.

Dans le passage suivant, Gauss situe l'invention des nombres complexes dans le cadre des extensions successives des ensembles numériques.

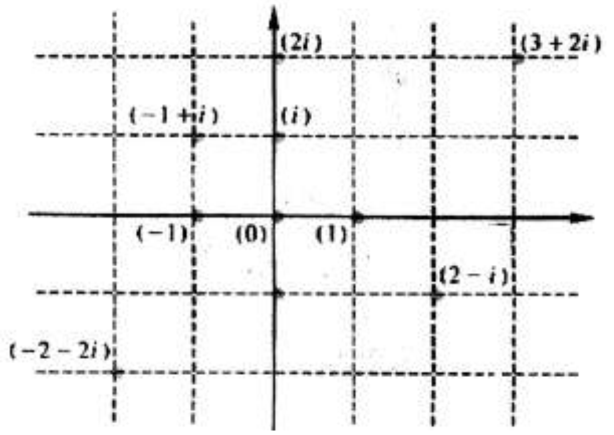
« Notre arithmétique générale, qui dépasse si largement la géométrie antique, est dans sa totalité la création de l'époque moderne. Partie du concept de nombres entiers, elle a progressivement élargi son domaine. Aux nombres entiers sont venus s'ajouter les nombres fractionnaires, aux nombres rationnels, les nombres irrationnels, aux nombres positifs, les nombres négatifs, aux nombres réels, les nombres imaginaires. Cette progression s'est cependant toujours effectuée d'un pas craintif et hésitant. Les premiers algébristes appelaient encore fausses les racines négatives des équations (et elles le sont effectivement là où le problème auquel elles se réfèrent est présenté de telle façon que la nature de la grandeur cherchée n'admet pas d'opposé). Mais de même qu'on a peu de scrupules à accueillir les nombres fractionnaires au sein de l'arithmétique générale, alors qu'il existe une multitude de choses dénombrables pour lesquelles un nombre fractionnaire est dénué de sens, de même on ne devrait pas refuser aux nombres négatifs des droits identiques à ceux des nombres positifs, sous prétexte qu'une infinité de choses n'admettent pas d'opposés. La réalité des nombres négatifs est amplement justifiée, puisqu'ils trouvent en mille autres occasions un support adéquat. En vérité, depuis longtemps, un fait est désormais établi : seules les grandeurs imaginaires, qui s'opposent aux grandeurs réelles (grandeurs imaginaires jadis, et parfois encore aujourd'hui appelées de façon maladroite impossibles) n'ont toujours pas acquis droit de cité ; elles sont seulement tolérées ; elles ressemblent donc davantage à un jeu de signes vides de contenu réel, auxquels on refuse résolument un support imaginable, sans vouloir pour autant dédaigner le riche tribut que ce jeu de signes verse en fin de compte au trésor des relations entre grandeurs réelles. »

traduit de l'allemand par A. Dubuc et D. Reisz, et diffusé par l'IREM de Dijon.

Nombres complexes et plan complexe :

A la fin du XVIII° siècle et au début du XIX° siècle, les mathématiciens recherchent une représentation de ces imaginaires, « un support adéquat », pour reprendre le texte précédent. Le norvégien Wessel, en 1797, puis le Genevois Argand en 1806, puis beaucoup d'autres, ont publié des essais sur le sujet, utilisant les points du plan repérés par les coordonnées polaires. Nous y reviendrons. Nous nous attachons ici à ce que propose Gauss, dans une lettre datée de 1811 :

« … de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelle au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen du plan indéfini, où chaque point déterminé par son abscisse a et par son ordonnée b représente en même temps la quantité a+ib. »



Sur cette figure, les points marqués représentent les nombres complexes indiqués entre parenthèses.

Dans son texte de 1831 Gauss ajoutait ;

« … si jusqu'à présent on a étudié cette matière d'un point de vue erroné et si l'on n' y a trouvé que mystère et obscurité, la faute en incombe essentiellement aux dénominations maladroites. Si l'on avait appelé + 1, – 1, $\sqrt{-1}$ non pas unité positive, négative et imaginaire (voire impossible) mais simplement unité directe, inverse et latérale, il n'eût pratiquement pas été question d'obscurité ».

La représentation « géométrique » des « nombres » complexes contribua à leur faire acquérir une sorte de légitimité. Dans les années qui suivirent, cette légitimité fut confirmée par des « constructions axiomatiques » rigoureuses, qui n'étaient plus liées à la géométrie.

Traité des quaternions (traduit en 1882) ; P. G. Tait (1831-1901)

« D'après cette manière de voir, la position d'un point dans le plan se trouve déterminée par la seule donnée d'une expression imaginaire. C'est ainsi que $a+b\sqrt{-1}$ pourra être considéré comme la seule représentation d'un point dont les coordonnées sont *a* et *b*. Mais on pourra tout aussi bien se servir de l'expression en question pour la représentation de la droite (*comprendre : segment orienté ou vecteur*) menée de l'origine au point dont il s'agit. Dans ce dernier aspect, l'expression $a+b\sqrt{-1}$ désigne à la fois et la direction et la longueur de la droite que nous venons de définir ; il est évident, en effet, que la droite forme avec l'axe des *x* un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$ et que la longueur de la droite est $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dans la série : 1 ; $\sqrt{-1}$; – 1 ; $-\sqrt{-1}$, chacun des termes se déduit du précédent par la multiplication de ce dernier par le facteur $\sqrt{-1}$. Nous sommes ainsi en droit de conclure que $\sqrt{-1}$ est un opérateur, dont l'application agit d'une manière analogue à celle d'une manivelle qui ferait tourner d'un angle de 90°, et dans le sens positif, toute ligne directive passant par l'origine et assujettie à se mouvoir dans le plan *xy*. »

La paternité du vocabulaire :

Imaginaire : Descartes, 1637
Nombre complexe : Gauss, 1831
Module : Argand, 1806 (*Notation* : $|z|$: Weierstrass)
Argument : Cauchy, 1838
Notation **i** : Euler 1777, repris par Gauss.

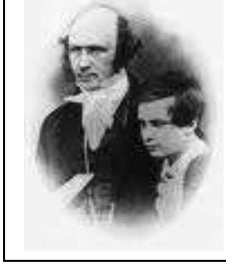
La contribution de Hamilton :

Une légitimation algébrique des nombres complexes a été élaborée vers 1835-1837, par le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton. (1805-1866)
Elle consiste à considérer les nombres complexes comme des couples de nombres réels (a , b) et à définir la somme et le produit de tels couples par :
(a , b) + (a' , b') = (a + a' , b + b')
(a , b) × (a' , b') = (aa' – bb' , ab' + ba').
On a alors les propriétés suivantes (que vous pouvez démontrer) :

1. (a , 0) + (a', 0) = (a + a' , 0)
2. (a, 0) × (a' , 0) = (aa' , 0)
3. (a , b) = (a , 0) + (0 , b) = (a, 0) × (1, 0) + (b , 0) ×(0 , 1)
4. (0 , 1) × (0 , 1) = (– 1, 0)

Ces propriétés permettent à Hamilton d'identifier le couple (a , 0) au réel a (et donc de le noter tout simplement a), et de noter que le « carré » du couple (0, 1) est égal au réel –1. Ce couple (0 , 1) est appelé unité secondaire par Hamilton. C'est ce que nous noterions i.
Avec ces conventions, nous noterons a + bi le couple (a , b). Ainsi sont définis les nombres complexes et leurs opérations.
« Dans la théorie des nombres simples, le symbole $\sqrt{-1}$ est absurde, mais dans la théorie des couples, le même symbole $\sqrt{-1}$ a un sens, à savoir la racine carrée principale du couple (–1 , 0). »
W. R. Hamilton, *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time.*
(1837),

W. R. Hamilton et son fils



La « formule magique » de L. Euler : $\boxed{e^{i\pi} = -1}$

Anne Boyé, Régionale APMEP de Nantes, IREM des Pays de la Loire