Echanges de pratiques sur le thème de l'enseignement des mathématiques par la résolution de problèmes au collège et au lycée

Une jolie réussite,

Voilà les mots qui me viennent à l'esprit lorsque je repense à cette rencontre.

Je souhaite remercier tous ceux qui y ont participé. Votre présence est un véritable encouragement pour les membres du comité et du bureau de la Régionale de Nantes. Quant à ceux qui n'ont pas pu faire le déplacement, qu'ils se rassurent, d'autres moments d'échanges seront très vraisemblablement organisés. En attendant, vous trouverez dans cette lettre des comptes-rendus détaillés. Vous apprécierez surement le travail remarquable des différents scribes.

Je n'oublie surtout pas les collègues qui ont bien voulu nous parler de ce qu'ils font en classe. Un grand merci à Isabelle Daveau, Marie-Line Moreau, Hélène Staïner, Jean-Luc Planes et Jean-Philippe Rouquès. L'authenticité et la proximité dont ils ont fait preuve, ont permis des échanges libres et fructueux.

Permettre à tous d'échanger, de débattre, de s'enrichir de l'expérience des autres et de faire partager la sienne, est l'une des principales activités de l'APMEP. C'est dans un esprit de convivialité et de proximité que nous vous avons proposé cette rencontre. J'espère sincèrement renouveler avec vous cette expérience.

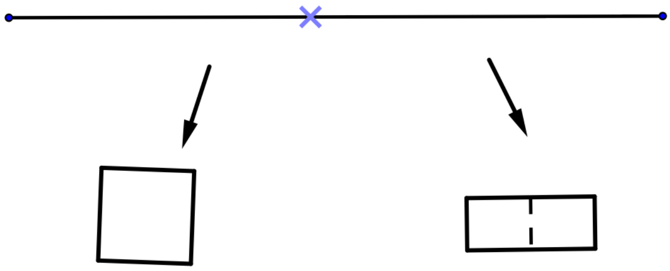
Stéphane CHOIMET

Compte-rendu rédigé par Anne Boyé

Voici un compte-rendu, le plus fidèle possible de notre après-midi d'échange sur quelques pratiques de problèmes. Nous avons eu successivement quatre présentations, toutes plus riches les unes que les autres. Je présente à la fois les problèmes proposés et les déroulements des activités. La gestion de la classe dans ces moments a un rôle très important comme l'a souligné Hélène.

I- Une expérience en seconde

Le premier acte se déroule dans la classe de Marie-Line, 35 élèves de seconde, option MPI majoritaire, fin septembre début octobre. Les élèves ont déjà les notions « en fonction de », d'antécédents, les tableaux de variations, … mais n'ont pas encore fréquenté f(x), du moins en seconde. Ils ont aussi eu une initiation à l'algorithmique, et au logiciel Algobox.
Il reste 20 mn après une correction de devoir, et le professeur leur soumet un petit problème, écrit au tableau :
On dispose d'une ficelle de 50 cm, on la coupe en deux morceaux. Avec l'un des morceaux on réalise un carré, et avec l'autre un « domino ». On voudrait minimiser la somme des aires, où couper ?
Un petit dessin est fait au tableau.



Les élèves sont intrigués, et posent quelques questions sur le sens du texte. Par exemple, que signifie minimiser ? Après éclaircissement, la consigne est donnée de se mettre au travail, en réfléchissant éventuellement avec les voisins immédiats.
La classe devient extraordinairement calme, plongée dans la recherche de la solution. Ceci ne s'était jamais produit auparavant.
Rapidement des défis sont lancés pour savoir qui a trouvé le moins. Il semblerait que le record soit 73,5 cm^2, pour un partage 24 ; 26… Mais les élèves sentent que ce n'est peut-être pas « la » bonne réponse.
Seuls des partages en nombres entiers semblent avoir été essayés. La question reste ouverte de savoir comment on pourrait faire pour obtenir un meilleur résultat.
A la fin des 20 mn, tous les élèves sont pris par la question, il semble donc nécessaire d'y revenir lors d'autres séances pour essayer peut-être d'obtenir une réponse satisfaisante.
Ce prolongement se fait quelque temps après en salle info, en demi-classe.
Cette fois, une feuille de TP est distribuée, posant des questions, et plus directive. Ceci peut évidemment se comprendre puisque la première séance a permis aux élèves d'accéder à ces questions. Cette fois la ficelle a 25 cm. On découpe un morceau de 4 cm, pour faire le carré, et on calcule ce qui se passe ; puis un morceau de 10 cm.
Le professeur estime qu'à ce moment les élèves vont avoir envie d'automatiser le calcul et vont trouver naturel de se diriger vers un algorithme.

Un programme sur AlgoBox leur est proposé dont ils doivent comprendre le bien fondé à l'aide de quelques questions. Les valeurs proposées sont des entiers de 0 à 25, pour le morceau permettant d'obtenir un carré.
Les plus rapides peuvent modifier l'algorithme pour obtenir un nuage de points et visualiser peut-être le « minimum ».
Ils peuvent faire le même travail avec une feuille de calcul Excel, en utilisant cette fois des valeurs décimales.

Seuls quelques élèves iront jusqu'à cette étape. Mais tous devront avoir l'idée que ces méthodes n'ont sans doute pas été suffisantes pour atteindre avec certitude le minimum. Donc la question reste en suspens.
Quelques jours après un nouvel outil se présente : la calculatrice graphique, qui va permettre d'obtenir un dessin de la courbe de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(25-x)^2}{18}$ et obtenir une valeur approchée de la valeur cherchée pour *x* qui soit meilleure (?), du moins une autre vision de la recherche.
Le problème sera enfin repris lors de l'étude des fonctions du second degré et le passage à la forme canonique. Un DM permettra même aux « meilleurs » élèves de la classe de se poser la question générale pour une ficelle de longueur L.
Le problème de la ficelle devient ainsi le fil directeur de l'année mathématique pour cette seconde, pouvant sûrement être repris en d'autres occasions, par exemple en statistiques.
Autrement dit « un problème pour une année », ou presque.
C'est probablement ce que l'on pourrait appeler un problème « riche ».

Questions réponses, dialogue avec l'assistance :

1. T'attendais-tu à tout cela quand tu as lancé le problème de la ficelle ?
2. Pourquoi le changement de 50 à 25 ?
3. Pourquoi n'y a-t-il pas eu plus ou moins rapidement l'introduction d'une variable ? (qui en fait apparaît dans le passage à l'algorithme, et encore plus dans le tableur).
4. Comment as-tu géré la synthèse ?
5. Si une situation analogue se présente les élèves sauront-ils utiliser leur expérience ?

La richesse du problème n'était pas apparue immédiatement. Maintenant c'est un fil directeur du cours de seconde.
Au départ, il fallait que la valeur pour x ne se trouve pas immédiatement, par tâtonnement.
Ensuite pourquoi ne pas changer en 25 (cela fait moins d'entiers à tester). En fait par la suite, pour que la mise sous forme canonique soit plus simple, on est aussi parti d'une ficelle de 68 cm.
Pour ce qui est de la variable, utiliser « x » leur serait naturel dans le cas d'une équation, mais ici c'était un problème tout autre, donc cela ne leur est pas venu.
Le passage au tableur était destiné à leur faire prendre conscience d'une « variable ».
La fin de l'activité proprement dite s'est faite en DM. Donc c'est un peu la synthèse. Mais c'est du provisoire puisque la ficelle est toujours présente.

II- Deuxième expérience

Nous sommes maintenant dans la classe de seconde de Jean-Luc, 35 élèves, option IGC et ISP, donc à orientation plutôt technologique. C'est quasiment le premier jour de cours de maths. Jean-Luc est un peu préoccupé par l'initiation à l'algorithmique, donc a décidé de s'y mettre le plus tôt possible.

Une consigne est lancée aux élèves : l'un d'eux pense un nombre, pas trop grand, et le communique à son voisin. Celui-ci le divise par 2 si le nombre est pair, et s'il est impair, il prend le triple et ajoute 1, puis passe le résultat au voisin, qui opère de même. Ainsi de suite.
On recueille les résultats au tableau et on finit par obtenir à partir d'un certain temps, la suite continue de nombres 4,2,1,4,2,1,4, 2,1, …, quel que soit le nombre de départ. Bizarre ! ! !

On passe alors à l'écrit. Par groupes de 2 ou 3, les élèves doivent concevoir un texte « clair » qui permette de comprendre, puis d'exécuter la consigne.
Les textes sont confrontés à l'oral.
Aucune allusion n'a été faite à un logiciel ou à une calculatrice, mais, lors de ce bilan sont apparus les mots et expressions, « architecture », « vocabulaire spécifique », « algorithme », « tant que … jusqu'à 1, j'arrête »...

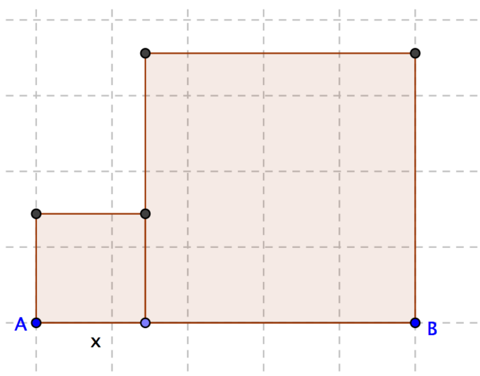
Le professeur ayant fait allusion à la conjecture de Syracuse, des élèves sont chargés de faire quelques recherches pour un exposé sur Collatz, Syracuse, … Plusieurs choses intéressantes ont été trouvées, dont un site proposant un logiciel de calcul pour les éléments de cette suite, ce qui est évidemment une bonne entrée pour une programmation des calculs. Cette recherche a le mérite de faire prendre conscience aux élèves que les mathématiques ne sont pas figées, et qu'il y a encore des résultats conjecturés mais qui ne sont pas démontrés, donc on ne sait toujours pas si c'est vrai ou faux.
La classe ayant accès tous les 3 ou 4 semaines à une salle info, ils ont réussi plus ou moins vite à écrire un programme sur AlgoBox, avec quelques difficultés liées par exemple à la traduction de « pair » et « impair », plus que semble-t-il à la prise en main du logiciel, guidée par le professeur.
Le bilan est nettement positif : un aller retour entre écrit et oral, permettant de travailler tous ces modes d'expression ; intérêt des élèves, investissement et recherche ; début d'initiation à l'algorithmique de façon naturelle ; une autre façon de faire des maths.
Cerise sur le gâteau, le professeur a présenté aux élèves quelques extraits de « La conjecture de Syracuse », d'Antoine Billot, qui a séduit plusieurs élèves. Les maths mènent à la lecture.

D'autres activités dans la même classe.

Question ouverte posée sur le site du lycée. En DM. Une sorte de TP d'algorithmique, à la maison pour comprendre :
On donne une somme, elle augmente de tant % par an, en combien d'années la somme aura-t-elle doublé ?
Cela motive les élèves, qui rendent un travail soigné.

Un problème de géométrie :

Quelle est la valeur de la ligne polygonale selon *x* ?
AB mesure 6 cm.

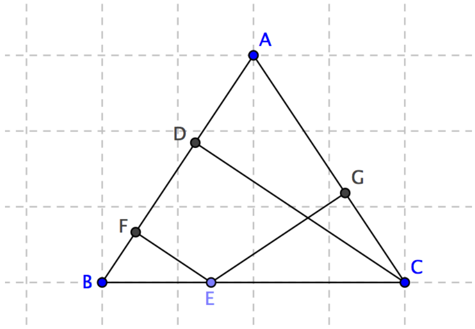


Conçu dans l'esprit de l'épreuve expérimentale de TS. (déjà ex ?)

Conjecture avec un logiciel, étape de démonstration, bilan en classe entière.
La construction de la figure avec Geogebra est déjà une étape instructive. Il faut que les carrés restent « carrés », quand les points bougent.
Seuls les « bons » pensent à instituer une fonction définie sur [0 ; 6].
Le bilan des recherches peut être fait au vidéoprojecteur par le professeur.

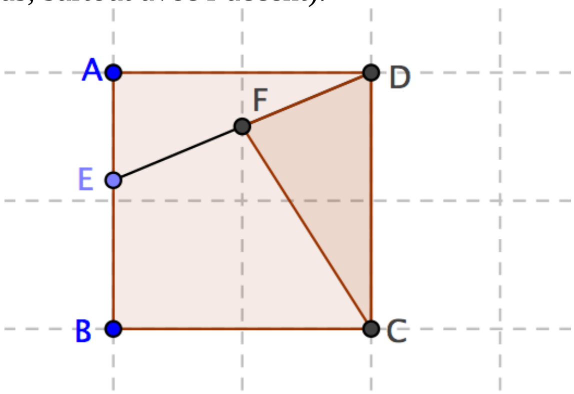
Les élèves cependant acquièrent plus d'autonomie.

Une autre situation **:**



ABC est un triangle isocèle donné. E est un point variable sur [BC]. (EF) est perpendiculaire à (AB) ; (EG) est perpendiculaire à (AC), et (CD) est perpendiculaire à (AB).
Que vaut EF + EG ?

Encore un ! (On ne se lasse pas, surtout avec l'accent).



Etudier la fonction Aire de CDF quant E varie sur [AB].

Il y aussi la somme des n premiers entiers naturels, avec l'histoire du « petit » Gauss.

Finalement on pourrait continuer sans se lasser. Nous imaginons que les élèves de la classe de Jean-Luc aussi.

Questions, réponses, dialogue avec l'assistance :

1. La classe ici est relativement homogène, du moins par le choix des options. C'était aussi le cas de celle de Marie-Line. Comment gère-t-on dans une classe beaucoup plus hétérogène, avec toutes sortes d'options, donc des intérêts différents ?
2. En seconde doit-on apprendre aux élèves à programmer ?
3. Quelle peut être la place de la calculatrice ?

Peut-être est-il possible de laisser une certaine autonomie aux élèves, en leur laissant le libre champ de commencer la recherche plutôt papier crayon puis éventuellement sur ordinateur, ou l'inverse. Eclairer la classe en comparant les recherches et les conjectures, ou les résultats obtenus.

Des témoignages du public montrent bien la difficulté de gestion de ces activités. D'autant que tous les élèves ne sont pas forcément séduits par l'ordinateur.

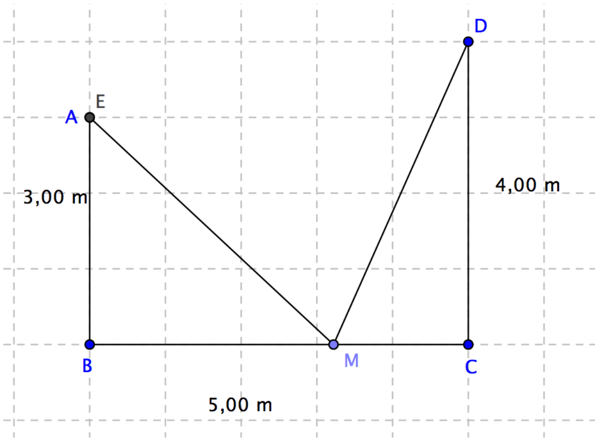
Il ne semble pas qu'apprendre à programmer soit un des objectifs de la classe de seconde. Il est donc intéressant de leur proposer des algorithmes, pour qu'ils en repèrent les différentes étapes, et qu'ils puissent juger de leur bien fondé ou non pour répondre au problème posé. Ceci étant bien sûr il n'est pas interdit de programmer. Le logiciel AlgoBox utilisé par Jean-Luc et ses élèves semble bien adapté aux activités de seconde.

La calculatrice est un objet pratique et transportable, qu'ils ont sous la main facilement. C'est un outil qu'il faut apprendre aux élèves à utiliser.

III- Troisième expérience

Nous sommes cette fois dans une classe de troisième. En début d'année. La philosophie d'Isabelle est que les élèves doivent être incités à chercher des problèmes. En collège, toutes les recherches qui aboutissent au résultat sont valables, peu importe la « beauté » de la démarche.

Voici le problème :



AB et CD sont deux tours d'où s'élancent deux oiseaux, à la même vitesse et au même instant. Ils atteignent M en même temps. Où se situe M sur le segment [BC] ?

Isabelle souligne que l'intérêt de ce problème est la diversité des approches pour la recherche.
Un ou deux élèves ont eu l'idée de tracer la médiatrice de [AB].
Plusieurs élèves ont eu l'idée de mettre en équation en choisissant une inconnue x, et utilisant le théorème de Pythagore.
D'autres ont tâtonné à l'aide du tableur et du théorème de Pythagore.
D'autres encore ont reproduit la figure avec Cabri, puis ont tâtonné en déplaçant le point M.

Les élèves aiment ce genre de recherche, car ils ne sont pas bloqués, ils ont l'impression que tout le monde peut y arriver, pensant qu'avec ces essais sur le tableur ou cabri, ils peuvent avoir la « chance » de tomber sur le bon résultat.

Questions, réponses, dialogue avec l'assistance :

1. Les élèves essaient-ils n'importe quelle valeur au hasard ? Ne faudrait-il pas qu'ils organisent leurs essais ?

2. Les démarches sont-elles confrontées ? si oui, comment ?
3. Comment ce genre d'activité peut-il être évalué ?
4. En particulier lors d'un devoir comment peut-on évaluer les compétences mises en jeu dans une telle recherche ?

Les élèves organisent vite leur recherche, car il est clair que M doit être plus proche de C que de B, et ils découvrent vite par eux-mêmes la méthode de dichotomie.
La méthode plus « mathématique » de mise en équation et résolution, en utilisant les identités remarquables est étudiée avec les élèves, mais Isabelle estime qu'il faut éviter de « juger », les démarches pour ne pas dévaloriser le travail des élèves.
En devoir en classe un tel exercice sera difficilement demandé car l'acte de recherche demande du temps. Cependant, lors du brevet par exemple, il y a des consignes d'évaluation. On peut s'en inspirer.
Cela incite les élèves à narrer leur recherche.
Quelques interventions dans l'assistance soulignent que ce problème se pose aussi au lycée, et que les questions de « compétences » se posent lors des évaluations des épreuves du bac.
Il semble qu'il soit intéressant de distinguer l'évaluation de la narration de recherche, et celle de l'exactitude de mathématiques en jeu et du résultat obtenu. Il ne suffit pas de savoir raconter, il faut aussi pouvoir répondre à la question posée de la meilleure façon possible d'un point de vue mathématique.

IV- Une autre présentation en collège, à deux voix

Nous sommes en 4°, et les élèves vont découvrir la notion de variable, en travaillant sur les squelettes de cubes.
Hélène et Jean-Philippe présentent leur travail plutôt du côté de la posture du professeur. Ils soulignent en effet qu'il ne suffit pas d'avoir une bonne activité, bien rôdée par un professeur chevronné, pour que cette même activité fonctionne avec un autre professeur moins expérimenté. La conduite d'un travail de groupes, puisque c'est ce dont il s'agit ici, ne s'improvise pas.
L'activité squelette est présentée dans le livre qu'ils ont tiré de leur expérience (dont la lecture est fortement recommandée). En gros, il faut essayer de trouver le nombre de petits cubes nécessaires pour remplir un cube dont on donne le squelette.
Les élèves travaillent en groupes de trois ou quatre, après un temps individuel de réflexion de 10 à 15 minutes.
Ils commencent à compter, à la main, puis essaient de trouver des stratégies plus élaborées.
Ils rendent compte de leur travail sur des transparents, qui pourront être analysés et commentés en plénière.
La discussion très riche, se porte assez rapidement sur les équivalences de formules, et un nouveau sens pour le signe « = ».
D'autres situations éventuellement inventées par les élèves permettent de poursuivre le travail.
Un jour Hélène a raconté à Jean-Philippe, nouvel arrivant au collège après quelques années d'enseignement en classe prépa, son activité squelette.
Séduit, il se lance aussi, et constate que mener ce genre d'activité de groupes ne s'improvise pas, même si l'on a un « texte bien rôdé ». Ce sont ses tâtonnements et questions qu'il nous raconte. Que fait l'enseignant pendant la phase de recherche ? Intervient-il ? Oui ? Non ? Comment ?
Il faut avant tout observer les élèves, préparer mentalement la gestion de la plénière, éventuellement relancer le travail, sans « faire » le travail élève ?, … Le moment le plus délicat sera sans doute la gestion de la plénière. Le magistral ne passe pas, il faut être animateur des débats, en sachant où l'on va (où l'on veut aller ?).

Questions, réponses, dialogue avec l'assistance :

Les questions sur la gestion de ce genre de travail sont évidemment nombreuses, en particulier sur la synthèse, sur les écrits des élèves, sur les relations activités, apprentissages, cours, …
Jean-Philippe et Hélène ont abandonné les traditionnels cahiers de cours/cahiers d'exercices. Ils ont institué le « carnet de bord », dont le nom seul est évocateur.
Cela n'empêche pas bien sûr d'écrire des synthèses, qui reprennent ce qu'ils ont découvert et ce qu'ils doivent savoir.
(Personnellement, au lycée, en seconde, j'ai institué le cahier de classe et le cahier de maison. En classe on note tout ce qui se fait, en solo ou avec les autres, avec un système de jeu de couleur et de cadre pour ce qui sera institué. En fin de cahier, des écrits récapitulatifs par sujets permettent de se retrouver dans un cours plus traditionnel. Mais en feuilletant leur cahier les élèves peuvent revivre ce qui a été vécu en classe. Sur le cahier de maison, ce sont les exercices à la maison, avec les traces de recherche, les questions posées au fur et à mesure, …)
Une question a été posée de la transposition possible de cette gestion des cours en classe prépa par exemple, puisque c'était l'expérience précédente de Jean-Philippe.

J'ai dû quitter la séance à ce moment. Mais j'imagine que, déjà, le nombre d'élèves dans la classe peut être un frein important. Que par ailleurs, il faut savoir s'adapter au degré de maturité des élèves. Il arrive un moment où les élèves peuvent bénéficier positivement d'un cours plus magistral, et sont probablement capables de mener un questionnement personnel, et d'en trouver quelques réponses avec les enseignants. Les activités telles que celles d'Hélène et Jean-Philippe au collège sont des moments forts pour la construction de l'autonomie. Entre le collège et la prépa ou la fac, il y a le lycée, ces années de passage entre l'élève et l'étudiant. Ce que Marie-Line et Jean-Luc ont raconté en seconde, sont des exemples de ce qui peut-être fait deux ans après la classe de quatrième, avec des élèves probablement à peine plus matures, mais qui demandent de ne plus être considérés comme des enfants. On garde le même esprit, mais la gestion évolue avec l'âge.
Il faut à la fois réfléchir au contenu des problèmes, des textes d'activités qui vont contribuer à l'éducation mathématique de nos élèves, et à la gestion de la classe qui ne va jamais de soi. L'expérience des unes et des uns se transpose rarement telle quelle, mais l'échange des idées et des situations est toujours enrichissant, sinon nécessaire.

Conclusion

Je me permets, en conclusion, puisque j'ai la plume, d'en abuser, en livrant à votre réflexion quelques extraits de deux articles parus dans la revue « L'enseignement mathématique », le premier sous le titre : *Développement de l'activité mathématique des élèves, et rôle des problèmes dans ce développement* : le second *L'enseignement par les problèmes.*

« Les interprétations de l'enseignement actif des mathématiques sont très différenciées … Les différences concernent avant tout la relation de deux facteurs fondamentaux intervenant dans chaque enseignement : la transmission des connaissances, des expériences et des méthodes de la pensée élaborée par les adultes d'un côté et la découverte libre et la création libre faite par les élèves eux-mêmes ».
« La question se pose : est-il nécessaire et est-il possible à tous les enfants de trouver de la satisfaction au niveau de cette tension intellectuelle ? D'autre part est-il possible d'enseigner aux enfants les mathématiques comme un jeu toujours excitant et agréable ? »
« La transmission des expériences intellectuelles de génération en génération est évidemment la condition sine qua non du progrès culturel de l'humanité. Mais transmettre et imposer sont des procédés extrêmement différents. La condition de cette transmission activant la pensée de l'élève, c'est la collaboration du maître et des élèves, aussi bien dans le développement de la théorie que dans son apprentissage. … La collaboration du maître et des élèves peut s'exprimer, en dehors des méthodes utilisée habituellement, par des exposés faits par des élèves et basés sur une lecture, par des lectures en

groupe d'un texte mathématique, par l'exploration individuelle ou en groupe d'une situation-source de problèmes mathématiques. »
« Il est facile d'apprécier les connaissances et l'habileté des élèves, il est au contraire très difficile d'évaluer objectivement le niveau de leur activité mathématique. »
« Deux sortes de problèmes sont à distinguer. Dans le premier cas la question est formulée avec précision, dans le second, elle n'est pas encore cristallisée. Ce second type est la base, la source, le stimulant de la construction des problèmes mathématiques. Au lieu d'encourager les élèves : voici un problème, cherchez la solution !, il faudrait plus souvent leur dire : voici une situation, pensez à elle. »

Et le deuxième article :

« Les mathématiques ne sont pas un sport pour spectateur. »
« La résolution d'un problème non routinier peut demander un véritable effort à l'élève ; cependant il ne le fera pas s'il n'a pas des raisons pour cela ; or la meilleure motivation est l'intérêt pour le problème. »
« De temps en temps, la classe devrait travailler à un problème plus important qui a un riche contenu et peut servir de porte d'entrée à un chapitre entier des mathématiques. Et la classe devrait travailler sans hâte, de telle sorte que selon le principe de l'enseignement actif, les élèves puissent découvrir (ou soient conduits à découvrir) la solution, et puissent exploiter par eux-mêmes quelques conséquences de la solution. »
« Sans métaphore, en aidant l'élève, le maître ne devrait donner qu'une aide intérieure, c'est-à-dire, des suggestions qui auraient pu naître dans l'esprit de l'élève, et éviter une aide extérieure, c'est-à-dire donner des bouts de solution qui n'ont pas de relation avec l'état d'esprit de l'élève. »

Ce ne sont que de très brefs extraits, mais la lecture en est savoureuse et passionnante. Les deux auteurs n'ont pas participé à notre après-midi sur les problèmes, on pourrait le croire pourtant, tellement leurs réflexions sont proches des nôtres. Il y a aussi les classes surchargées, le manque de temps, le manque de connaissances de base des élèves, l'hétérogénéité… Mais enfin de compte l'immense bonheur quand on voit des petites étoiles dans les yeux des élèves.
En fait, c'était en 1966 pour le premier, par A. Krygowska, et en 1967 pour le deuxième, par G. Polya.

Anne BOYE

Compte-rendu rédigé par Raymond Torrent

Lors de la rencontre organisée le 3 février dernier par la Régionale APMEP sur l'enseignement des mathématiques par la résolution de problèmes au collège et au lycée, j'étais chargé de relever au fur et à mesure des présentations, les points forts qui pouvaient apparaître et les questionnements. En voici la restitution ; ce n'est pas un compte-rendu, c'est un regard (subjectif bien sûr) sur les situations d'enseignement présentées (très variées et très intéressantes) et sur les échanges (particulièrement riches) entre les participants.

Le premier point fort qui ressort de cet éventail d'activités réalisées dans des classes, est le constat que la recherche de problèmes permet aux élèves de modifier leur représentation de l'activité mathématique et de rompre avec une attitude passive. Parallèlement, pour le professeur de mathématiques, conduire une recherche de problème dans la classe modifie de façon significative la nature de son intervention auprès des élèves et sa pratique pédagogique. Il s'agit : « de faire des mathématiques autrement, d'enseigner les mathématiques autrement ».

D'autres points sont apparus au cours de l'après-midi :

- Tous les énoncés présentés, pourtant très différents par les thèmes abordés (que ce soit « la ficelle coupée », « Syracuse », « les deux tours » ou « les squelettes de cubes ») sont des énoncés non pas simples (la réponse est loin d'être immédiate) mais des énoncés « ouverts » associés à des situations qui apparaissent suffisamment familières pour que leur appropriation par les élèves soit effective. Les énoncés portent en eux un défi à relever, une incitation à la recherche. Il en découle une réelle motivation à chercher et à trouver. La question qui se pose devient la question que se posent les élèves.

- La recherche de ces problèmes se traduit toujours par des démarches de résolution variées. Ces démarches sont souvent de nature très différente (tâtonnements, essais-erreurs, examen de cas particuliers successifs, tentatives de généralisation et de formalisation, référence à un cadre plutôt numérique ou plutôt géométrique…) ; ces démarches variées ne conduisent pas toujours à la résolution du problème mais elles donnent toutes une interprétation plus ou moins avancée de la situation proposée. C'est l'expression de ces différentes démarches à l'oral comme à l'écrit (sous des modes de représentation variés) puis leur confrontation qui permettent « d'y voir plus clair » et d'avancer collectivement dans la résolution mathématique du problème.

- Les étapes du travail engagé par les élèves sont souvent les mêmes : recherche individuelle (correspondant à un temps d'appropriation par chacun de la situation et par des premières tentatives de résolution) suivi parfois d'un temps de recherche par petits groupes puis d'un temps de communication et de confrontation des différentes démarches enfin un temps de validation et d'institutionnalisation.

- Les démarches engagées sont souvent propices à une utilisation des outils de calcul (calculatrices, tableurs…) et à une introduction à la démarche algorithmique (avec traduction sur ordinateur). Les TICE interviennent aussi dans la communication des démarches et dans la rédaction des solutions « finalisées ».

- Le travail de l'enseignant au cours d'une séance de résolution de problème se trouve profondément modifié (…Il en fait moins magistralement et il parle moins…). Au cours de la phase de recherche, il observe, guide si nécessaire, accompagne les élèves (en particulier ceux qui rencontrent des difficultés). Pendant la restitution des démarches, il devient l'animateur d'un débat scientifique, en le faisant avancer par un questionnement. Toutes les démarches ne se valent pas d'un point de vue mathématique. Leur portée et leur validité sont questionnées. Lors de la synthèse il lui revient la responsabilité de formaliser les connaissances mathématiques sous-jacentes et de leur donner le statut d'un savoir qui donnera lieu à une formalisation, à des applications et à des prolongements. Tous les intervenants ont insisté sur le fait que la gestion de la classe au cours d'une séance de résolution de problème ne s'improvise pas…mais se bonifie au fil du temps…

Des questions sont ressorties également au cours de ces échanges ; questions dont les réponses ne sont ni simples, ni immédiates et sur lesquelles la réflexion à partir des pratiques effectives doit se poursuivre :

- Comment relier un problème particulier à une classe de problèmes ? Comment généraliser, ou mieux comment faire ressentir le besoin aux élèves d'une nécessaire généralisation ?

- Comment organiser les traces écrites (et ce au cours de différentes étapes de la résolution) ? Hélène et Jean-Philippe ont proposé au niveau collège trois outils (le cahier de recherche, le cahier de bord et le cahier de résumés). L'utilisation des TICE apparait aussi comme un moyen motivant pour engager les élèves dans la mise en forme de solutions rédigées une fois le problème résolu.

- Comment, lors d'une séance de résolution de problèmes, gérer l'hétérogénéité des élèves ? (faire en sorte que chacun ait sa place, que chacun s'engage réellement..). Au début certains élèves semblent démunis face à ce type de séance, mais peu à peu s'adaptent et en tirent profit.

- Comment évaluer ? Il a été rappelé que ce sont d'abord des séances d'apprentissage. Dans le cas où une résolution de problèmes donne lieu à une évaluation, il est possible de distinguer la qualité de l'explicitation de la démarche de l'élève même si elle n'aboutit pas à la résolution complète du problème et la validité mathématique de la solution proposée.

- Quelle place pour l'algorithmique ? N'y a-t-il pas un risque : « l'algorithmique à tout prix » ? Cependant, l'algorithmique permet d'aborder des situations mathématiques souvent motivantes, dynamiques.

Bien d'autres points ou questions ont été abordés. Mais l'essentiel est là. La lecture du dernier numéro de Repères IREM (n°78 de janvier 2010) apporte des compléments à la réflexion qui a été la notre au cours de cette rencontre : je pense tout particulièrement à l'article sur « les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré », à celui qui concerne « deux algorithmes du PGCD plus un » et enfin « l'arithmétique et la culture du problème ». Coïncidence ? Non …nécessité liée aux contextes des évolutions actuelles des programmes.

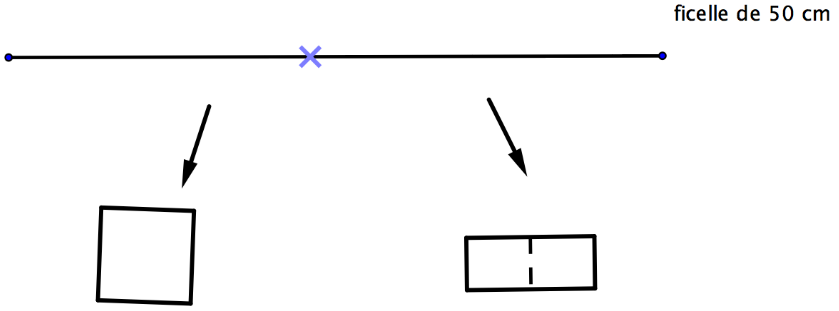
Raymond TORRENT

Activité proposée par Marie-Line

TP Ficelle, carré et domino

Rappel de la situation

On dispose d'une ficelle de 25 cm, que l'on coupe en deux parties pas nécessairement égales.
Avec le premier morceau on délimite un carré avec le reste un domino.



On cherche à minimiser la somme des aires.

1. On suppose qu'on a coupé un morceau de 4 cm pour faire le carré.
- **a.** Quelle est la longueur du côté du carré ?
- **b.** Quelles sont les dimensions des côtés du domino ?
- **c.** Calculer et indiquer la somme des aires S = ...

2. Mêmes questions si on coupe un morceau de 10 cm pour faire le carré.
- **a.** Le carré a pour côté .... le domino mesure .... de large et .... de long.
- **b.** Somme des aires S = ...

3. On souhaite automatiser les calculs. Pour cela on a écrit l'algorithme suivant.

```
VARIABLES
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR M ALLANT_DE 0 A 25
    DEBUT_POUR
    R PREND_LA_VALEUR 25-M
    C PREND_LA_VALEUR M/4
    L PREND_LA_VALEUR R/6
    S PREND_LA_VALEUR pow(C,2)+L*(2*L)
    AFFICHER "Pour M = "
    AFFICHER M
    AFFICHER "La somme des aires est égales à "
    AFFICHER S
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

En face de chacune des variables indiquer ce qu'elle désigne.
Que calcule l'ordinateur lorsqu'il li l'instruction pow(C,2).

4. Ouvrir AlgoBox et taper cet algorithme.
- **a.** Le faire fonctionner.
- **b.** Quel semble être le minimum et pour quelle valeur est-il atteint ?

5. L'algorithme précédent a-t-il fait tous les essais possibles ? Est-on sur d’avoir le minimum ?

Pour les plus rapides

6. Modifier l'algorithme pour faire dessiner le nuage de points.

7. On peut aussi automatiser les calculs avec un tableur.
   Ouvrir un classeur Excel et préparer une feuille de calcul comme ci-dessous.

B2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Périmètre du carré	Périmètre du domino	Côté du carré	Largeur du domino	Longueur du domino	Aire du carré	Aire du domino	Aire totale	
2	0								
3	0,1								
4	0,2								
5									
6									
7									

Taper 0 en A2 et 0,1 en A3.
Puis par recopie automatique compléter la colonne A jusqu'à ce que s'affiche la valeur 25.

Indiquer pour chacune des cellules ce qu'il faut taper pour que les calculs annoncés en tête de colonne soient effectués et puissent être tirés jusqu'en bas des colonnes
B2 = C2 = D2 = E2 = F2 =

Quel semble être le minimum pour la somme des aires et pour quel partage de la ficelle est-il atteint ?

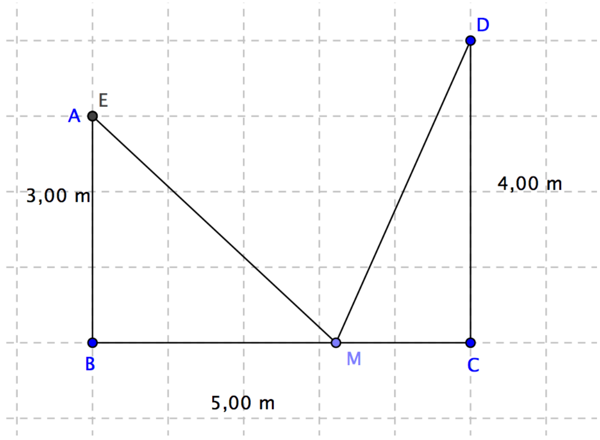
Par cette méthode est-on sur d'obtenir le minimum ?

Activité proposée par Isabelle

Problème ouvert : les deux tours

Deux tours, hautes de 30 m et de 40 m, sont distantes l'une de l'autre de 50 m.
Un puits est situé entre les deux tours.
Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour et volent à la même vitesse.
Peux-tu déterminer la position du puits sachant que les oiseaux se posent dessus au même instant ?

Illustration du problème :

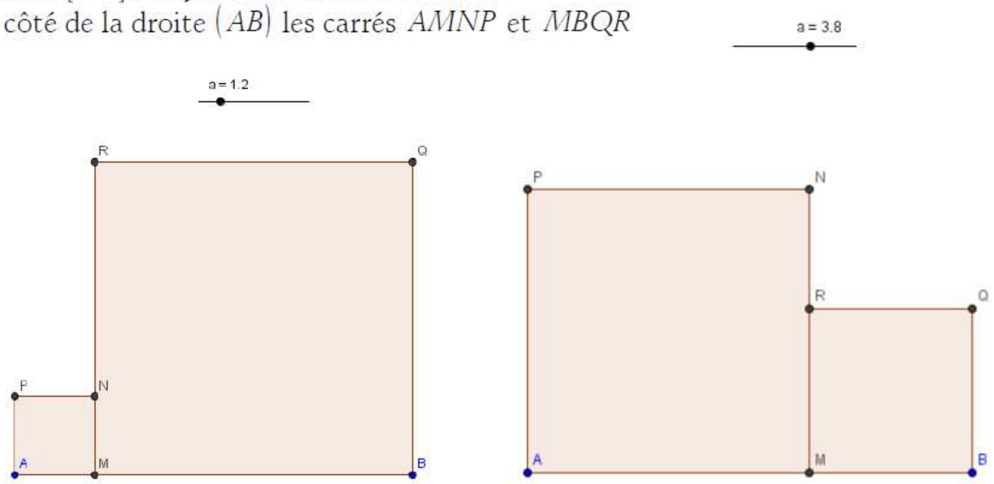


Activité proposée par Jean-Luc

T.P. : Longueur d'une ligne polygonale

Mise en place de la situation

A et B sont deux points tels que $AB = 6$.
M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 6$
On construit du même côté de la droite (AB) les carrés $AMNP$ et $MBQR$



<u>BUT :</u> Étudier les VARIATIONS de la longueur L de la ligne polygonale $APNRQB$

1. Conjecturer avec un logiciel (ici : GEOGEBRA)

a. Créer la variable libre a dans l'intervalle $[0\,;6]$ ***(en utilisant le curseur)***
b. Créer alors les points repérés $A(0\,;0)$ ***(taper A=(0,0))***, $B(6\,;0)$ et $M(a\,;0)$
c. Créer de même les points N, P, Q et R puis les carrés $AMNP$ et $MBQR$

Appeler le professeur pour valider la figure dynamique

d. Créer la longueur L de la ligne polygonale $APNRQB$
e. Créer le point $U(a\,;L)$, activer sa trace et piloter M sur le segment $[AB]$
f. En faisant « varier a »,
proposer une conjecture concernant les variations de la longueur L lorsque a décrit l'intervalle $[0\,;6]$ ***(à marquer sur la fiche réponse ci-contre)***

Appeler le professeur pour valider la conjecture

2. Une démonstration

On note f la fonction qui, à tout réel x de $[0\,;6]$, associe la longueur L

a. Exprimer $f(x)$ en fonction de x en distinguant deux situations
b. Étudier le sens de variations de la fonction f
c. Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f

3. Prolongement :

a. Écrire un algorithme automatisant le calcul de L connaissant la longueur AM.
b. Traduire cet algorithme en langage AlgoBox ou Calculatrice .

4. Ouverture : Mettez en œuvre une « démarche expérimentale » pour étudier les variations de la fonction $g : a \to A(a)$ où A est l'aire délimitée par la ligne polygonale L.

Activité proposée par Jean-Luc

T.P. : Algorithmique

Première Partie : Savoir exécuter un algorithme

```
Variables
    N, a, b entiers
Début
    Entrer N
    a prend la valeur 3×N
    b prend la valeur a + 2
    Afficher b
Fin
```

Répondre par VRAI ou par FAUX, en corrigeant l'erreur lorsque c'est faux :

1. Le nombre obtenu avec l'entrée 2 est 8 :
2. Le nombre obtenu avec l'entrée -4 est 14 :
3. Si on veut obtenir 11, il faut entrer 3 :
4. Si on veut obtenir -5, il faut entrer -1 :

Deuxième Partie : Savoir analyser un algorithme

Premier exemple :

```
Variables :
    x, y, z : réels
Début
    Entrer x
    Entrer y
    z ← x
    x ← y
    y ← z
    Afficher x
    Afficher y
Fin
```

1. Tester cet algorithme pour différentes valeurs de x et y :
   -
   -
   -
   -
2. Que fait donc cet algorithme ?

Deuxième exemple :

```
Variables :
    N, S, I : entiers
Début
    Entrer N
    S ← 0
    Pour I allant de 0 à N-1
        S ← S+2×I+1
    Fin Pour
    Afficher S
Fin
```

1. Tester cet algorithme pour :
   - $N = 3$
   - $N = 10$
2. Que fait donc cet algorithme ?

Activité proposée par Jean-Luc

T.P. : Algorithmique

Troisième Partie : Savoir écrire un algorithme
Indice de Masse Corporelle IMC

On mesure l'obésité, c'est-à-dire l'excès de masse grasse, à l'aide de l'indice de masse corporelle, noté $\boldsymbol{I}$, évalué à partir du poids P (en kg) et de la taille T (en m) d'un individu selon la formule : $\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{T^2}}$

$\boldsymbol{I}$ s'exprime donc en $kg \cdot m^{-2}$, $\boldsymbol{I}$ est donc une « fonction des deux variables » P et T

1. a. Calculer $\boldsymbol{I}$ pour $P = 80\ kg$ et $T = 1{,}75\ m$

b. Même question pour $P = 70\ kg$ et $T = 1{,}70\ m$

2. Suivant une classification établie par l' Organisation Mondiale de la Santé (O.M.S.), un individu est en surpoids lorsque $\boldsymbol{I > 25}$.
Voici un algorithme qui demande à l'utilisateur son poids en kilogrammes et sa taille en mètres, puis calcule l'indice $\boldsymbol{I}$ et affiche s'il est en surpoids ou non :

```
Variables
    P, T, I
Début
    Saisir P, T
    I prend la valeur P/T²
    Si I > 25 alors
       Afficher « l'individu est en surpoids »
    Sinon
       Afficher « l'individu n'est pas en surpoids »
    FinSi
Fin
```

a. Traduire cet algorithme en « langage AlgoBox »

b. Faire fonctionner ce programme pour différentes valeurs de P et T :

-
-
-

3. Pour un poids de 60 kg, à quelles tailles un individu est-il en surpoids ?

4. Suivant la classification de l' O.M.S., un individu est en état de maigreur si $\boldsymbol{I < 18{,}5}$

a. Transformer l'algorithme précédent de manière à classer un individu suivant qu'il est de constitution maigre, moyenne ou en surpoids.

b. Faire fonctionner le programme correspondant pour différentes valeurs de P et T .

-
-

Quatrième Partie : question de « recherche »

1. Pour sa naissance en 2009, les grands-parents de Samuel placent une somme de 1500 euros sur son livret d'épargne rémunéré à 2,25 %. **En quelle année la somme aura-t-elle doublée ?**

2. Concevoir un algorithme répondant à la question, l'année de naissance A, la somme placée S et le taux de rémunération du livret T étant « variables » .

Activité proposée par Jean-Luc

T.P. : Sommes d'entiers consécutifs

Mise en place « historique » de la situation ...

« Le maître d'école s'appelait Büttner et il aimait rosser ses élèves. Il feignait d'être sévère et ascétique, et, en quelques rares occasions, l'expression de son visage révélait le plaisir qu'il prenait à les rouer de coups. [...] Cela se passait dans le quartier le plus pauvre de Brunswick, aucun de ces enfants n'irait jamais à l'école secondaire, personne ici ne travaillerait autrement qu'avec ses mains. Gauss avait beau se taire et s'évertuer à répondre aussi lentement que les autres, il percevait la méfiance du maître. Il sentait que ce dernier n'attendait qu'une occasion de le frapper un peu plus fort que le reste du groupe. Et un beau jour, il lui fournit cette occasion.

Büttner leur avait demandé d'additionner tous les nombres de un à cent. Cela prendrait des heures et, même avec la meilleure bonne volonté du monde, ce n'était pas possible sans faire à un moment ou à un autre une erreur de calcul pour laquelle on pouvait alors être puni. [...] Gauss ne réussit pas à se contrôler ce jour là et au bout de trois minutes il s'était retrouvé devant le pupitre du maître avec son ardoise.

Bon, dit Büttner, et il saisit le bâton. Qu'est-ce que c'est que ça ?

Cinq mille cinquante.

Quoi ?

Daniel Kehlmann, *Les arpenteurs du monde*, Actes Sud, 2006

BUT : n étant un entier naturel donné, l'objectif est de déterminer une méthode simple pour calculer la somme des entiers consécutifs de 0 à n

1. Conjecture à l'aide du tableur

On note $S(n)$ la somme des entiers de 0 à n
On a ainsi : $S(0)=0$, $S(1)=0+1=1$, $S(2)=0+1+2=3$ etc.

a. A l'aide d'un tableur, calculer $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$ ... $S(100)$

Appeler le professeur pour valider les calculs

b. Calculer alors le double des valeurs précédentes.
c. Faire une conjecture sur l'expression $S(n)$ en fonction de n
(à marquer sur la fiche réponse ci-contre)

Appeler le professeur pour valider la conjecture

Suite et fin de l'histoire de Gauss et de son maître d'école Büttner ...

Gauss se racla la gorge : c'était pourtant bien cela qu'il fallait faire, dit-il, additionner tous les nombres de un à cent. Cent plus un faisaient cent-un. Quatre-ving-dix-neuf plus deux faisaient cent-un. Quatre-ving-dix-huit plus trois faisaient cent-un. Toujours cent-un. On pouvait répéter l'opération cinquante fois. Donc : cinquante fois cent-un. »

2. Démonstration

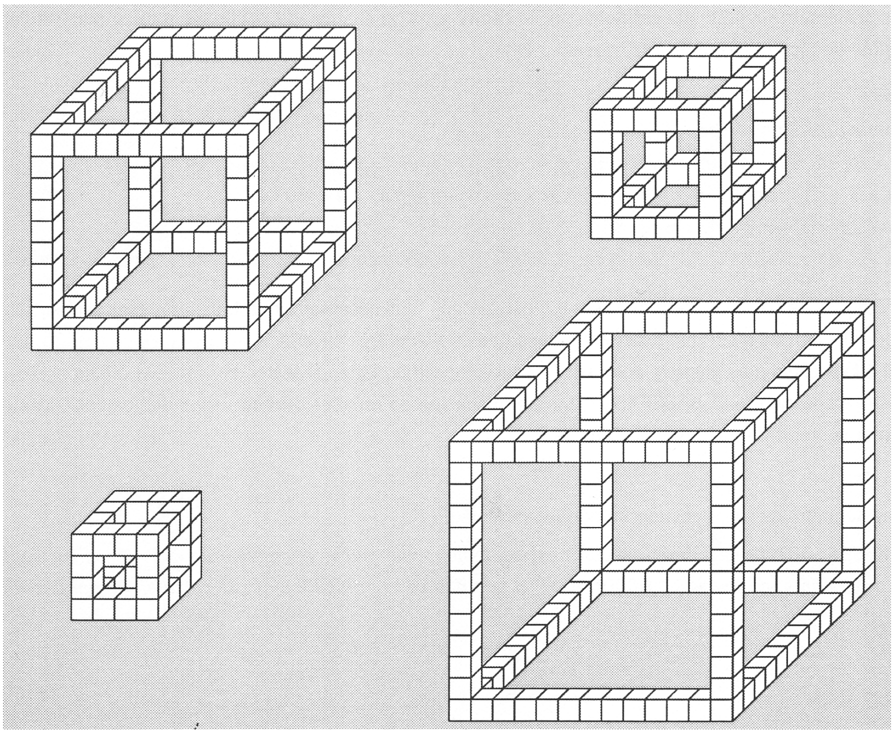
Démontrez le résultat conjecturé. ***(à marquer sur la fiche réponse ci-contre)***

3. Prolongement algorithmique

a. Créer un algorithme automatisant le calcul de la somme des entiers de 0 à n connaissant n.
b. Variante : Une somme S étant donnée, créer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $S(n) \geqslant S$

Activité proposée par Hélène et Jean-Philippe

Exercice : des squelettes de cubes



On fabrique des « squelettes de cubes » en collant face contre face des petits cubes de 1 cm d'arêtes, comme le montre les quatre dessins en perspective ci-dessus.
On peut fabriquer des « squelettes de cubes » aussi grands que l'on veut.
Pouvez-vous dire combien il faut de petits cubes pour fabriquer n'importe quel squelette ?