

## Baccalauréat S Liban juin 2000

### Exercice 1

6 points

#### Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants :

$A$  « Les trois boules sont rouges. »

$B$  « Les trois boules sont de la même couleur. »

$C$  « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités  $p(A)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

b. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . Calculer  $E(X)$ .

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par  $n$  boules rouges où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc  $n+5$  boules, c'est-à-dire,  $n$  rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants :

$D$  « Tirer deux boules rouges. »

$E$  « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'évènement  $D$  est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

b. Calculer la probabilité de l'évènement  $E$ ,  $p(E)$  en fonction de  $n$ . Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $p(E) \geq \frac{1}{2}$  ?

### Exercice 2 (obligatoire)

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $i$  et  $-i$ .

Soit  $f$  l'application qui à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  distincte de  $-i$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que

$$z' = \frac{1+iz}{z+i}.$$

1. Quelle est l'image par l'application  $f$  du point  $O$  ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application  $f$  le point  $C$  d'affixe  $1+i$  ?

3. Montrer que l'équation  $\frac{1+iz}{z+i} = z$  admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que  $z' = \frac{i(z-i)}{z+i}$ , en déduire  $OM' = \frac{AM}{BM}$  et :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application  $f$  situées sur un même cercle ( $\mathcal{C}$ ) que l'on précisera.

6. Soit  $M$  un point du cercle de diamètre  $[AB]$  différent de  $A$  et de  $B$ , montrer que son image  $M'$  est située sur l'axe des abscisses.

**Exercice 2 (spécialité)****5 points**

1. Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $A$  et  $B$  dans ce plan d'affixes respectives  $a = 1 + i$ ;  $b = -4 - i$ . Soit  $f$  la transformation du plan  $(\mathcal{P})$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $\vec{OM'} = 2\vec{AM} + \vec{BM}$ .
- Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .
  - Montrer que  $f$  admet un seul point invariant  $\Omega$  dont on donnera l'affixe. En déduire que  $f$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  sont des entiers naturels avec  $1 \leq x \leq 8$  et  $1 \leq y \leq 8$ .  
Les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$  sont alors :  $x' = 3x + 2$  et  $y' = 3y - 1$ .
- On appelle  $G$  et  $H$  les ensembles des valeurs prises respectivement par  $x'$  et  $y'$ . Écrire la liste des éléments de  $G$  et  $H$ .
  - Montrer que  $x' - y'$  est un multiple de 3.
  - Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples  $(x'; y')$  de  $G \times H$  tels que  $m = x'^2 - y'^2$  soit un multiple non nul de 60.
  - Montrer que dans ces conditions, le nombre  $x' - y'$  est un multiple de 6. Le nombre  $x' - y'$  peut-il être un multiple de 30 ?
  - En déduire que, si  $x'^2 - y'^2$  est un multiple non nul de 60,  $x' + y'$  est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples  $(x'; y')$  qui conviennent. En déduire les couples  $(x; y)$  correspondant aux couples  $(x'; y')$  trouvés.

**Problème****11 points****★ Partie A - Préliminaires**

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(t) = e^t - t - 1.$$

Quel est le minimum de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $] -\infty; +\infty[$  ?

2. En déduire les inégalités suivantes :
- Pour tout réel  $t$ ,  $e^t \geq t + 1$ ,  $e^t > t$  et  $-te^{-t} > -1$ .
  - Pour tout réel  $t$  tel que  $t > -1$ ,  $\ln(1 + t) \leq t$ .
3. En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $\ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x}$ .

**★ Partie B - Étude d'une fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x).$$

1. Montrer que  $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$ . Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?  
On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est  $+\infty$ .

2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$ .

Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole ( $\mathcal{P}$ ) d'équation  $y = x^2 - 2x$  et ( $\mathcal{C}$ ) la courbe représentative de  $f$ . Montrer que ( $\mathcal{P}$ ) et ( $\mathcal{C}$ ) sont asymptotes en  $+\infty$ . Étudier les positions relatives des courbes ( $\mathcal{P}$ ) et ( $\mathcal{C}$ ).

3. Donner une équation de chacune des tangentes ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ) respectivement aux courbes ( $\mathcal{P}$ ) et ( $\mathcal{C}$ ) aux points d'abscisse 0.
4. Tracer dans un même repère les courbes ( $\mathcal{P}$ ) et ( $\mathcal{C}$ ) et leurs tangentes ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ).

★ **Partie C - Étude d'une intégrale**

1. Soit  $n$  un entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^n xe^{-x} dx$ .
- Démontrer que la suite  $u$  de terme général  $u_n$  est croissante.
  - Calculer  $u_n$  à l'aide d'une intégration par parties.
  - Déterminer la limite de la suite  $u_n$ .
2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation  $x = 0$ ,  $x = n$ , la parabole ( $\mathcal{P}$ ) et la courbe ( $\mathcal{C}$ ) est définie par

$$I_n = -2 \int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx$$

- Montrer en utilisant la question 3) des préliminaires que  $I_n \geq 2u_n$ .
- On admet que la suite  $(I_n)$  a pour limite  $l$ . Montrer que :  $l \geq 2$ .