Baccalauréat C Liban juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On donne la suite (q_n), $n \in \mathbb{N}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.
On construit la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{q_0} \\ u_1 & = & \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & = & \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

1. Montrer que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant pas exemple que de q_0).
   En déduire que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, a un limite, qui appartient à l'intervalle $]0\,;\,1]$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier k, $q_n = q_k$, la limite de la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, est un rationnel.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Dans le plan affine affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe C définie par : $2ay = x^2$, a réel positif donné.
2. Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe C au point M_1 d'abscisse x_1.
   Quelle relation doivent vérifier x_1 et x_2 de deux points M_1 et M_2 de C pour que les tangentes à C en ces points soient orthogonales ?
3. Démontrer que la droite M_1M_2 déterminée par deux points de C ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
   Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à C en M_1 et M_2.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

$\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, on pose

$$\text{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifiera que $1 + \text{j} + \text{j}^2 = 0$.
Soit F l'application polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)\left(z - \text{j}^2\right) + \frac{2}{9}(\text{j} - 4).$$

1. Déterminer les coefficients complexes a et b de façon que l'application σ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$z \longmapsto \sigma(z) = az + b$$

vérifie les deux conditions :

$$\sigma\left(\mathrm{j}^2\right) = 0, \quad \sigma(0) = -1.$$

Comparer alors $\sigma(-1)$ et j^2.

2. On considère l'application s de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dépendant du paramètre complexe m :

$$z \longmapsto s(z) = mz - 1.$$

Peut-on déterminer m de façon que

$$(\forall z \in \mathbb{C}), \quad F[s(z)] = F(z)?$$

(On admet que deux applications polynômes sont égales si, et seulement si, les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients.)
Comparer au résultat du A 1.

3. Soit r l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$z \longmapsto \mathrm{j}z) - 1.$$

Déterminer l'unique complexe z_0 invariant par r. Vérifier que $z_0^2 = -\dfrac{1}{3}\mathrm{j}^2$.
Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout z dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure d'espace affine réel, z_0 est l'isobarycentre du triplet $\left(z,\ r(z),\ r^2(z)\right)$.

4. Pour λ complexe, développer et ordonner $F(z_0 + \lambda)$. En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et le situer sur une figure du plan complexe.

Partie B

Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). Un endomorphisme f de E est dit ternaire si $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$, application identique de E. (Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$, etc.)

1. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme ternaire de E, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de E tel que le système $\left(\overrightarrow{u},\ f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ soit lié.

Montrer que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$. En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & k \end{pmatrix}, h, k \text{ étant deux réels.}$$

Démontrer que f est nécessairement l'application identique. (On calculera A^3.)

2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E et que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de E, le système $\left(\overrightarrow{u},\ f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ soit libre. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de E, et $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$; alors il existe deux réels $p,\ q$ tels que la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}.$$

Calculer p et q de façon que f soit ternaire.

p et q ayant les valeurs trouvées, et Π désignant un plan affine attaché à E, démontrer analytiquement ou par tout autre procédé, que l'application affine g de Π dans Π admettant f comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ g \circ g = \text{Id}_{\Pi}$.

3. Plus généralement, soit F l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ de E, est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel donné de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

On définit sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par

$$\Phi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}\right) = 1, \quad \Phi\left(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{v}\right) = 1, \quad \Phi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) = \cos\theta.$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur E, et que F est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(E,\ \Phi)$.

E étant supposé orienté par la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{w}$ de E de façon que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}\right)$ soit une base directe et orthonormée relativement à Φ.

Former la matrice de F dans cette nouvelle base.

Quelle est la nature de F dans $(E,\ \Phi)$? À quelle condition, n étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \text{Id}_E$?