Baccalauréat C Liban septembre 1983

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+\mathrm{i})z^2 - 2z(1+2\mathrm{i}) + 4\mathrm{i} - 20 = 0.$$

2. On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_{A} et z_{B}, z_{A} et z_{B} étant les solutions de l'équation précédente avec cette partie réelle de z_{A} strictement négative.

Vérifier que les points C et D d'affixes respectives $z_{\text{C}} = 3+4\mathrm{i}$ et $z_{\text{D}} = -3\mathrm{i}$, forment avec les points A et B un carré dont on donnera l'affixe du centre O.

3. Soit les points A, B, C, O affectés respectivement des coefficients a, b, 4 et -4.

Déterminer a et b pour que O, origine du repère du plan complexe soit le barycentre du système $\{\text{A}(a),\ \text{B}(b),\ \text{C}(4),\ \text{D}(-4)\}$.

EXERCICE 2

Soit $\mathscr{E}$ l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
a et b étant deux réels non tous nuls, on envisage l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\ y'\,;\ z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & a^2x - by - abz \\ y' & = & abx + ay - b^2z \\ z' & = & bx + az \end{array}\right.$$

On notera cette application affine $\varphi_{a,\,b}$.

1. Montrer que $\varphi_{1,\,0}$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

2. Comment faut-il choisir a et b pour que $\varphi_{a,\,b}$ soit une isométrie ? Cette condition étant supposée réalisée, chercher l'ensemble des points invariants par $\varphi_{a,\,b}$. Quelle est la nature de $\varphi_{a,\,b}$?

PROBLÈME

1. n étant un entier naturel donné, différent de zéro, on envisage la fonction f_n de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$x \longmapsto f_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ln|x-1|.$$

a. Montrer que, pour tout x différent de 1, on a

$$f_n'(x) = \frac{x^n}{x-1}.$$

Étudier le sens de variation de f_n. (on distinguera les cas n pair et n impair). Montrer que la fonction f_n est monotone sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$ et étudier les limites de f_n aux bornes de cet intervalle.

b. Faire l'étude complète des fonctions f_1 et f_2. Tracer leurs représentations graphiques respectives C_1 et C_2 sur des feuilles distinctes.

2. On envisage la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = 1 + \frac{1}{-} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a. Montrer que v_n est l'intégrale d'une fonction constante par morceaux majorant la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[1~;~n+1]$.

Établir que

$$\ln(n+1) < v_n < 1 + \ln n$$

(on pourra s'aider de la représentation graphique de la fonction h et de la subdivision $(1, 2, 3, \ldots, \text{n}, \text{n}+1)$.

b. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

3. Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$f_n(x) > v_n + \ln(x-1)$$

En déduire que, pour tout x fixé strictement supérieur à 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

4. **a.** Montrer que

$$f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > v_n - \ln n.$$

En déduire que $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est strictement positif.

b. Montrer qu'il existe un réel α_n unique, strictement compris entre 1 et $1 + \dfrac{1}{n}$, pour lequel $f_n(\alpha_n) = 0$. Vérifier ce résultat sur C1 et C_2.

5. **a.** Expliquer pourquoi on a pour tout $x < 1$,

$$_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

et pour tout $x > 1$,

$$f_n(x) = \int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

b. Montrer que

$$\left|f_n(-1)\right| = \int_{-1}^0 \frac{(-t)^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que, pour tout entier naturel n différent de zéro, on a

$$\int_{-1}^0 \frac{(-t)^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^0 (-t)^n\,\mathrm{d}t$$

puis que

$$\left|f_n(-1)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite $\left(f_n(-1)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et donner sa limite.
N. B. : La notation ln représente le logarithme népérien.