∽ Baccalauréat ES Liban juin 1999 ∾

EXERCICE 1
Commun à tous les candidats

Tous les jours, Obélix part en promenade en quête soit de casques romains pour sa collection, soit de sangliers qu'il ne trouve que dans la forêt. Il ne rentre au village que lorsqu'il a atteint l'un ou l'autre de ses objectifs.
Durant sa promenade, soit il rencontre des Romains à la sortie du village avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, soit il entre dans la forêt. Une fois dans la forêt, la probabilité de rencontrer des Romains est égaie à $\frac{1}{5}$, celle de rencontrer des sangliers est égale à $\frac{4}{5}$.
Pour faciliter la résolution de cet exercice, on pourra représenter les données précédentes sur un arbre.

1. **a.** Calculer la probabilité qu'Obélix « récolte » des casques dans la forêt.
   b. Calculer la probabilité qu'Obélix « récolte » des sangliers.
2. Le druide Panoramix voit Obélix entrer dans le village les bras chargés de casques romains. Quelle est la probabilité qu'Obéiix ait atteint la forêt ?
3. Panoramix observe le manège d'Obélix pendant 3 jours.
   Quelle est la probabilité qu'Obélix revienne de ses promenades au moins une fois avec des sangliers ? (On donnera une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de cette probabilité.)

EXERCICE 2

Jean et Pierre sont deux jumeaux : Jean, qui est fumeur, dépense 3 000 F par an pour l'achat de ses cigarettes. Pierre, qui ne fume pas, lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer.
Il lui propose de déposer tous les ans, le 2 janvier, cette somme de 3 000 F sur un compte rémunéré à intérêts composés par la banque, au taux annuel de 3 %. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.
Le 2 janvier 1999, il verse 3 000 F et les intérêts acquis sont capitalisés le 31 décembre 1999. Tous les ans, le 2 janvier, il verse à nouveau 3 000 F.

1. Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes :
   a. Le 3 janvier 2000 ?
   b. Le 3 janvier 2001 ?
2. On note u_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999, u_1 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2000, u_2 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2001, u_n la somme disponible sur le livret le 3 janvier de l'année $1999+n$, où n désigne un entier naturel.
   Montrer qu'on a la relation $u_{n+1} = 1,03u_n + 3000$.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 100000$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
4. Pierre affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant trente ans. De quelle somme Jean aurait-il pu disposer le 3 janvier 2029 ?

PROBLÈME

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie pour tout réel x, par

$$f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. (Unité graphique : 2 cm.)

Partie A

Soit la fonction g définie, pour tout réel x, par

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 1.$$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas de limites).
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x réel.

Partie B

1. On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. Déterminer, en les justitiant, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = x$. Démontrer que $(\mathscr{D})$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

   Étudier les positions de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
3. Si f' désigne la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$. À l'aide de la question A 2., déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Déterminer par le calcul les coordonnées du point de $(\mathscr{C})$ où la tangente (T_1) est parallèle à l'asymptote $(\mathscr{D})$.
6. Tracer $(\mathscr{D})$, (T_0), (T_1) et $(\mathscr{C})$.