# ∽ Baccalauréat ES Liban juin 2000 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

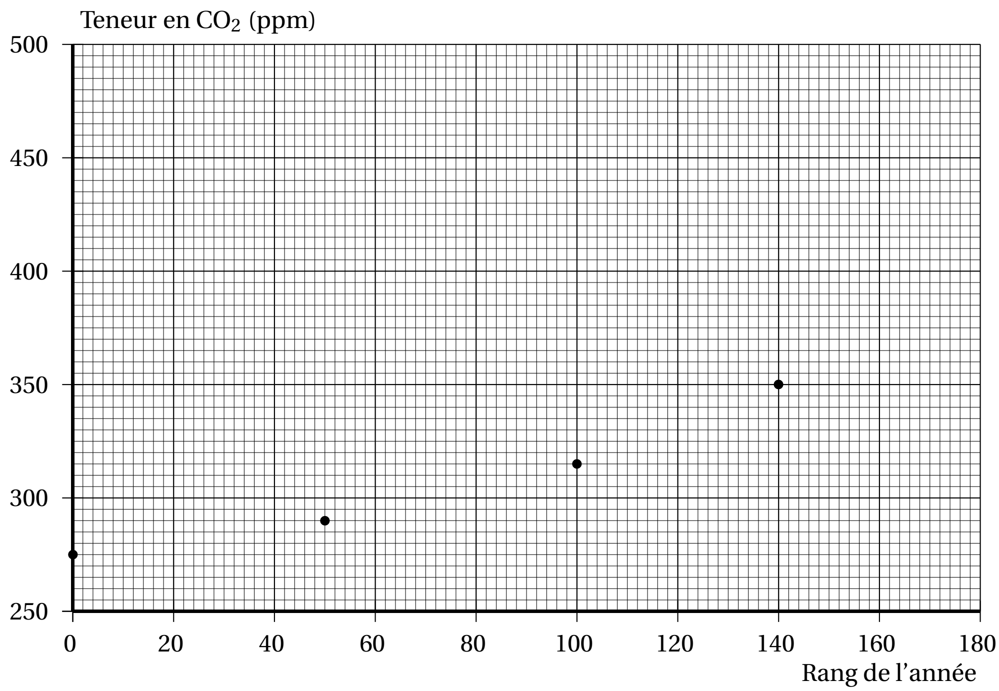
**Commun à tous les candidats**

Le tableau suivant indique la teneur de l'air en dioxyde de carbone ($CO_2$), observée depuis le début de l'ère industrielle.

Dans le tableau ci-dessous, $x_i$ représente le rang de l'année et $y_i$ la teneur en $CO_2$ exprimée en parties par million (ppm).

| Année | 1850 | 1900 | 1950 | 1990 |
|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 0 | 50 | 100 | 140 |
| Teneur en $CO_2$ $y_i$ | 275 | 290 | 315 | 350 |

On a représenté dans le repère ci-après le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.




On veut modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. Plusieurs types de fonctions semblent utilisables.

**1.** Modélisation par une fonction affine

**a.** À l'aide d'une calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire, arrondi au centième, de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

**b.** À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, avec $a$ arrondi au centième et $b$ à l'unité. Représenter cette droite dans le repère ci-dessus.

**c.** Selon ce modèle, quelle teneur en $CO_2$ peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point M correspondant à cette prévision.

**2.** Modélisation par une fonction $f$ définie par $f(x) = 250 + B\text{e}^{Ax}$.

On pose $z_i = \ln(y_i - 250)$. On admet que la série $(x_i\,;\,z_i)$ a pour coefficient de corrélation linéaire 0,999 et qu'une équation de la droite de régression de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés est : $z = 0,01x + 3,2$.

**a.** Selon ce modèle, quelle teneur en $C0_2$ peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point N correspondant à cette prévision.

**b.** Donner une équation de la courbe d'ajustement de $y$ en $x$, sous la forme
$y = f(x) = 250 + B\text{e}^{Ax}$, avec $A$ arrondi au centième et $B$ à l'unité.

**c.** En déduire des valeurs approchées décimales arrondies à l'unité près de $f(0)$, $f(50)$, $f(100)$, $f(140)$.

**3.** Laquelle des deux prévisions de la teneur en $CO_2$ pour 2010 vous semble la plus plausible ? Pourquoi ?

## EXERCICE 2 — 5 points
**obligatoire**

Un jeu forain utilise une roue divisée en dix secteurs : sept sont verts, trois sont rouges.

On fait tourner la roue, et lorsqu'elle s'arrête, un repère désigne un secteur, chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu.

Jouer une partie est l'expérience aléatoire consistant à faire tourner la roue trois fois de suite, de façon indépendante, en notant à chaque arrêt la couleur obtenue.

**1. a.** Représenter à l'aide d'un arbre cette expérience aléatoire et indiquer sur chaque branche les probabilités correspondantes.

**b.** Montrer que la probabilité d'obtenir trois fois le vert est égale à $0,343$.

**c.** Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le rouge.

**d.** Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois le rouge.

**2.** Pour jouer une partie, un joueur doit miser une somme d'argent : soit $m$ le montant de sa mise. S'il obtient trois fois le vert, il perd sa mise. S'il obtient une ou deux fois le rouge, il récupère sa mise. S'il obtient trois fois le rouge, il récupère sa mise et gagne une somme égale à dix fois sa mise.

On note $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur : les valeurs que peut prendre $X$ sont $-m$, 0 et $10m$.

**a.** Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**b.** Exprimer l'espérance de $X$ en fonction de $m$. Expliquer pourquoi, quelle que soit la mise du joueur, la règle du jeu avantage le forain.

## EXERCICE 2 — 5 points
**(spécialité)**

### Partie A - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 200$.

**1.** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**2.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par
$v_n = u_n - 500$.

**a.** Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le terme et la raison.

**b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire que $u_n = 400 \times (0,6)^n + 500$.

**c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie B - Application économique**

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications. Les clients souscrivent, le 1er janvier, soit auprès de A, soit auprès de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B.

Cette année 2000, la société A détient 90 % du marché et la société B, qui vient de se lancer, 10 %. On estime que, chaque année, 20 % de la clientèle de A change pour B, et de même 20 % de la clientèle de B change pour A. On considère une population représentative de 1 000 clients de l'année 2000. Ainsi, 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1. **a.** Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001.
   Calculer le nombre de clients de A en 2002.

   **b.** On note $a_n$ le nombre de clients de A l'année $(2000+n)$.
   Établir que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2(1000 - a_n)$.
   En déduire que $a_{n+1} = 0,6a_n + 200$.
2. En utilisant le résultat de la **partie A**, que peut-on prévoir pour l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays ?

**PROBLÈME** **10 points**

*Le but du problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (**Partie** B), en s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (**Partie** A).*

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{-1+\ln x}{x^2}.$$

Certains renseignements concernant la fonction $f$ sont consignés dans le tableau suivant :

| $x$ | $1$ | | $e^{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ |

1. **a.** Montrer que, pour $x$ élément de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{3-2\ln x}{x^3}$, où $f'$ désigne la dérivée de $f$.

   **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$, et retrouver les variations de $f$ données dans le tableau (aucun calcul de limite n'est demandé).
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[1\ ;\ e]$.
3. En utilisant les résultats précédents et le tableau de variation de $f$, donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.

**Partie B**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. **a.** Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.)

   **b.** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[g(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = 0$.

   Interpréter ce résultat pour la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ et la courbe $\mathscr{C}$

   **c.** Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2. Montrer que la fonction $f$ étudiée dans la **partie A** est la fonction dérivée de $g$.
   En déduire le sens de variation de $g$.

3. Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse e, et T la tangente à $\mathscr{C}$ en M. Justifier que T est parallèle à $\mathscr{D}$ .

4. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et T dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 2 cm).
   Indiquer le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\alpha$ (on utilisera 1,25 pour valeur approchée de $\alpha$) et la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point. Enfin, tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5. On désigne par $\mathscr{S}$ le domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Soit $A$ la valeur exprimée en unités d'aire de l'aire du domaine $\mathscr{S}$.

   **a.** Exprimer $A$ à l'aide d'une intégrale (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale dans cette question).

   **b.** Une primitive sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ de la fonction $h$ définie par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est
   $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
   Calculer $A$.